

Pasi Häkli  
Jyrki Puupponen  
Hannu Koivula  
Markku Poutanen

## SUOMEN GEODEETTISET KOORDINAATISTOT JA NIIDEN VÄLISET MUUNNOKSET



ISBN 978-951-711-273-4  
ISBN-978-951-711-274-1 (PDF, [www.fgi.fi](http://www.fgi.fi))  
ISSN: 0787-9172

## KORJAUKSIA

Tähän päivitettyyn sähköiseen versioon Geodeettisen laitoksen tiedotteesta 30 on päivämäärällä 10.12.2009 tehty seuraavat korjaukset.

### **Liite D, laskuesimerkki 15, sivu 115**

Alkuperäisessä esimerkissä mittakaavakertoimessa on käytetty  $m:n$  arvona virheellisesti nollaa ( $m=0$ ), jolloin mittakaavakerroin kaavassa on ollut 1.

### **Liite D, laskuesimerkit 16-17, sivut 116-118**

Alkuperäiset laskuesimerkit 16-17 välivaiheineen ovat oikein annetuilla syötteillä, mutta koska laskuesimerkit 15-17 muodostavat yhden muunnospolun on tähän korjattuun pdf-versioon laskettu uudet arvot esimerkistä 15 saaduilla uusilla koordinaateilla.

Tekijät



## ALKUSANAT

Olemme siirtymässä perinteisestä kansallisesta koordinaatistosta eurooppalaiseen ja globaaliin koordinaattijärjestelmään perustuvaan koordinaatistoon. Muutos on merkittävä ja se vaikuttaa valtakunnan tasolta aina paikallisiin mittauksiin saakka.

Suomen I luokan kolmioverkko oli yksi maailman tarkimmista. Mittausmenetelmät olivat vuosisatojen kuluessa kehitetty sellaisiksi, että lähes kaikki virhelähteet tulivat eliminoiduiksi tai ne voitiin laskennassa ottaa huomioon. Kolmioverkon mittaaminen kesti liki 70 vuotta. Suurin yhteiskunnallinen merkitys kolmiomittauksilla oli valtakunnallisiin koordinaatistoihin ja karttoihin. 1920-luvulla luotiin Helsingin järjestelmä. Se oli käytössä aina vuoteen 1970, jolloin sen korvasi Kartastokoordinaattijärjestelmä (kkj), joka on edelleen laajassa käytössä.

Satelliittien käyttö ja erityisesti GPS mullistivat geodeettiset mittaukset ja 1980-luvun lopulle tultaessa euroopanlaajuisissa mittauksissa saavutettiin jo desimetriluokan tarkkuuksia. Tästä alkoi tapahtumaketju, joka johti uuden eurooppalaisen koordinaattijärjestelmän ETRS89:n luomiseen. Suomeen mitattiin 1990-luvun lopussa ETRS89:n kansallinen realisaatio: EUREF-FIN.

Useat valtakunnalliset organisaatiot ovat siirtyneet tai ovat siirtymässä kkj-koordinaatistosta EUREF-FIN-koordinaatistoon. Muun muuassa uudet maasto- ja peruskartat painetaan jo EUREF-FIN-koordinaatossa ja usea kunta tai seutukunta on siirtymässä tai jo siirtynyt käyttämään EUREF-FIN:iä. Uuteen järjestelmään ja koordinaatistoon siirtyminen on raskas ja kauaskantoinen projekti. Lisäksi on jatkuvasti tarvetta muuntaa koordinaatteja järjestelmästä toiseen.

Koordinaattimuunnosten toteuttamiseen on useita vaihtoehtoja ja menneinä vuosina muunnoksista on julkaistu monenlaisia ohjeistuksia. Ohjeet ovat olleet hyvin kirjavia ja hajallaan eri lähteissä. Tässä tiedotteessa pyritään selventämään koordinaattimuunnoksiin liittyviä ongelmia ja mahdollisuuksia sekä kokoamaan yhteen tärkeimmät muunnoksiin liittyvät asiat. Ensimmäisessä osassa (kappaleet 1-4) käsitellään koordinaatistoja ja toisessa osassa (kappaleet 5-6) niiden välisiä muunnoksia esimerkkikaavioiden ja laskuesimerkkien avulla.

Muunnosten suorittamista on pyritty helpottamaan myös Geodeettisen laitoksen muunnospalvelulla, joka avattiin syksyllä 2008. Muunnospalvelu toteutettiin Web-sovelluksena ja se kattaa myös tässä tiedotteessa esitettyjen valtakunnallisten koordinaatistojen väliset muunnokset. Palvelusta löytyy myös koordinaatistoihin ja muunnoksiin liittyvää lisätietoa.

Esitämme lämpimät kiitokset FT Matti Ollikaiselle monista koordinaatistoihin ja muunnoksiin liittyvistä tiedoista ja ohjeista sekä tämän työn ideasta jo vuosia sitten. Kiitämme myös DI Ulla Kalliota tasoituslaskuun liittyvistä neuvoista sekä DI Janne Kovasta työhön liittyvistä kommentteista.

Tekijät

*Työssä esitetyt karttakuvat on tehty pääosin Generic Mapping Tools (GMT) ohjelmalla.*



# SISÄLLYSLUETTELO

OSA 1 SUOMALAISET KOORDINAATISTOT .....	7
<b>1 JOHDANTO .....</b>	<b>7</b>
1.1 KOORDINAATTIJÄRJESTELMÄ.....	7
1.2 GEODEETTINEN KOORDINAATISTO .....	7
1.3 KARTTAPROJEKTIO.....	7
<b>2 KARTASTOKOORDINAATTIJÄRJESTELMÄ (KKJ).....</b>	<b>9</b>
2.1 KOLMIOMITTAUS.....	9
2.1.1 <i>Kulmien mittaaminen Suomen I luokan kolmioverkossa.....</i>	<i>9</i>
2.1.2 <i>Tähtitieteelliset mittaukset I luokan kolmiomittauksissa Suomessa.....</i>	<i>12</i>
2.1.3 <i>Perusviivan mittaukset Suomen I luokan kolmioverkossa.....</i>	<i>14</i>
2.2 KOLMIOMITTAUKSELLA MUODOSTETUT KOORDINAATTIJÄRJESTELMÄT .....	16
2.2.1 <i>Helsingin järjestelmä (valtion vanha järjestelmä, vvj) .....</i>	<i>16</i>
2.2.2 <i>European Datum 1950 (ED50) ja Suomen kolmioverkon tasoitus 1956–1966 (1966 yhteistasoitus) .....</i>	<i>16</i>
2.2.3 <i>Kartastokoordinaattijärjestelmän (kkj) luonti .....</i>	<i>17</i>
<b>3 EUREF-FIN-KOORDINAATISTO .....</b>	<b>19</b>
3.1 AVARUUSGEODEETTISILLA MITTAUKSILLA MUODOSTETUT GLOBAALIT KOORDINAATISTOT .....	19
3.1.1 <i>World Geodetic System 1984 (WGS84) .....</i>	<i>19</i>
3.1.2 <i>International Terrestrial Reference System (ITRS) ja sen realisaatiot.....</i>	<i>20</i>
3.1.3 <i>European Terrestrial Reference System 89 (ETRS89).....</i>	<i>22</i>
3.2 EUREF-FIN – ETRS89-KOORDINAATTIJÄRJESTELMÄN KANSALLINEN REALISAATIO .....	23
3.2.1 <i>Suomen pysyvä GPS-verkko – FinnRef® .....</i>	<i>23</i>
3.2.2 <i>EUREF-FIN-mittauskampanja 1996–1997.....</i>	<i>24</i>
3.2.3 <i>ITRF96-koordinaattien muuntaminen ETRS89-järjestelmään EUREF-FIN-koordinaateiksi.....</i>	<i>26</i>
3.3 EUREF-FIN-KOORDINAATISTON KÄYTTÖNOTTO.....	27
3.3.1 <i>Julkisen hallinnon suositukset.....</i>	<i>27</i>
3.3.2 <i>EUREF-FIN-pistetihennykset.....</i>	<i>27</i>
3.3.3 <i>EUREF-FIN:n kanssa käytettävät karttaprojektiot.....</i>	<i>29</i>
<b>4 KORKEUDET .....</b>	<b>31</b>
4.1 SUOMALAISET KORKEUSJÄRJESTELMÄT .....	31
4.1.1 <i>NN-korkeusjärjestelmä.....</i>	<i>31</i>
4.1.2 <i>N43-korkeusjärjestelmä .....</i>	<i>32</i>
4.1.3 <i>N60-korkeusjärjestelmä .....</i>	<i>32</i>
4.1.4 <i>N2000-korkeusjärjestelmä .....</i>	<i>32</i>
4.2 ELLIPSOIDISET KORKEUDET.....	33
4.3 GEOIDI JA GEOIDIMALLIT .....	33

<b>OSA 2 MUUNNOKSET</b> .....	<b>35</b>
<b>5 MUUNNOKSET JA KONVERSIOT</b> .....	<b>35</b>
5.1 KOORDINAATTIKONVERSIOT .....	36
5.2 KOORDINAATTIMUUNNOKSET JA MUUNNOSPARAMETRIEN MÄÄRITTÄMINEN .....	37
5.3 KOLMIULOTTEINEN YHDENMUOTOISUUSMUUNNOS .....	38
5.4 TASOMUUNNOKSET .....	39
5.4.1 Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnos tasolla .....	39
5.4.2 Affiininen muunnos tasolla.....	40
5.4.3 Affiininen muunnos kolmioittain .....	41
5.4.4 Bilineaarinen interpolointi hilassa.....	41
5.4.5 Bilineaarisen interpoloinnin hyödyntäminen kolmioittaisen affiinisen muunnoksen tapauksessa.....	42
<b>6 MUUNNOKSET SUOMALAISTEN KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ</b> .....	<b>44</b>
6.1 KOLMIULOTTEINEN YHDENMUOTOISUUSMUUNNOS EUREF-FIN JA KkJ-KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ.....	44
6.2 TASOMUUNNOKSET KkJ JA EUREF-FIN-KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ .....	46
6.2.1 Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnos tasossa koko Suomen alueelle.....	46
6.2.2 Affiininen muunnos kolmioittain ykj- ja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistojen välillä.....	48
6.3 PAIKALLISET KOORDINAATISTOT .....	49
6.3.1 EUREF-FIN:iin liittyminen.....	50
6.3.2 Paikallinen tasomuunnos ja muunnosmenetelmän vaikutus .....	50
<b>7 YHTEENVETO</b> .....	<b>52</b>
<b>8 LÄHDELUETTELO</b> .....	<b>53</b>
<b>LIITTEET</b> .....	<b>58</b>
LIITE A. LYHENTEET JA MÄÄRITELMÄT .....	58
LIITE B. KONVERSIOKAAVAT.....	68
B1 Maantieteellisten ja tasokoordinaattien väliset kaavat (JHS154).....	68
B1.1 Maantieteellisistä koordinaateista ( $\varphi$ , $\lambda$ ) tasokoordinaateiksi (N, E) poikittaiselle lieriöprojektiolle.....	70
B1.2 Poikittaisen lieriöprojektion tasokoordinaateista (N, E) maantieteellisiksi koordinaatteihin ( $\varphi$ , $\lambda$ ).....	71
B2 Maantieteellisten ja suorakulmaisten 3D-koordinaattien väliset kaavat (JHS153).....	72
B2.1 Maantieteelliset koordinaatit suorakulmaisiksi 3D-koordinaateiksi.....	72
B2.2 Suorakulmaiset 3D-koordinaatit maantieteellisiksi koordinaateiksi.....	73
B3 Konversio ETRS-GK27 ja ETRS-TM35FIN tasokoordinaatistojen välillä .....	74
LIITE C. KOORDINAATTIMUUNNOSKAAVAT JA MUUNNOSPARAMETRIEN LASKENTA.....	75
C1 Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos .....	76
C1.1 Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen muunnoskaavat ja niiden johtaminen.....	76
C1.2 Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen muunnosparametrien ratkaiseminen PNS-tasoituksena (Burša-Wolf).....	78
C2 Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrien määrittäminen virheyhtälötasoituksena (Burša-Wolf).....	81



<i>C3 Affiinen muunnos</i> .....	83
<i>C3.1 Affiinisen muunnoksen parametrien määrittäminen</i> .....	83
<i>C3.2 Muunnoskolmion etsintä kolmioverkosta affiinisen kolmioittaisen muunnoksen tapauksessa</i> .....	85
LIITE D. ESIMERKIT .....	87
<i>Laskuesimerkkikaaviot</i> .....	88
<i>Laskuesimerkki 1. kkj tasokoordinaattien (1. kaista) konvertoiminen maantieteellisiksi koordinaateiksi</i> .....	91
<i>Laskuesimerkki 2. Maantieteellisten kkj-koordinaattien konvertoiminen tasolle ykj-koordinaateiksi</i> .....	93
<i>Laskuesimerkki 3. Affiinen muunnos kolmioittain</i> .....	95
<i>Laskuesimerkki 3a. Affiinisen muunnoksen muunnosparametrien laskenta</i> .....	95
<i>Laskuesimerkki 3b. Affiinen muunnos</i> .....	96
<i>Laskuesimerkki 3c. Bilineaarisen interpoloinnin hyödyntäminen kolmioittaisessa affiinisessä muunnoksessa</i> .....	96
<i>Laskuesimerkki 4. ETRS-GK27-koordinaattien konvertoiminen ETRS-TM35FIN-koordinaateiksi</i> .....	99
<i>Laskuesimerkki 5. ETRS-TM35-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi</i> .....	100
<i>Laskuesimerkki 6. Korkeus vertausellipsoidista</i> .....	102
<i>Laskuesimerkki 7. Maantieteellisten EUREF-FIN-koordinaattien konvertoiminen suorakulmaisiksi kolmiulotteisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi</i> .....	103
<i>Laskuesimerkki 8. Kolmiulotteisten suorakulmaisten EUREF-FIN-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi</i> .....	104
<i>Laskuesimerkki 9. Ortometrinen korkeus</i> .....	105
<i>Laskuesimerkki 10. Maantieteellisten EUREF-FIN-koordinaattien konvertoiminen ETRS-TM35FIN-tasokoordinaateiksi</i> .....	106
<i>Laskuesimerkki 11. ETRS-TM35FIN-koordinaattien konvertoiminen ETRS-GK27-koordinaateiksi</i> .....	108
<i>Laskuesimerkki 12. Affiinen muunnos kolmioittain</i> .....	109
<i>Laskuesimerkki 13. ykj-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi kkj-koordinaateiksi</i> .....	111
<i>Laskuesimerkki 14. Maantieteellisten kkj-koordinaattien konvertoiminen kkj-tasokoordinaateiksi kaistaan 1</i> .....	113
<i>Laskuesimerkki 15. Kolmiulotteisten EUREF-FIN-koordinaattien muuntaminen "3D-kkj"-koordinaateiksi</i> .....	115
<i>Laskuesimerkki 16. "3D-kkj"-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi kkj-koordinaateiksi</i> .....	116
<i>Laskuesimerkki 17. Maantieteellisten kkj-koordinaattien konvertoiminen kkj-tasokoordinaateiksi 1. kaistaan</i> .....	117
<i>Laskuesimerkki 18. Neliparametrin Helmert-muunnosparametrien laskenta</i> .....	119



# OSA 1 SUOMALAISET KOORDINAATISTOT

## 1 Johdanto

### 1.1 Koordinaattijärjestelmä

Geodeettista *koordinaattijärjestelmää* luotaessa määritellään järjestelmän origo ja koordinaattiakselien orientointi (ks. liite A, CTRS). Koordinaattijärjestelmän luomiseksi ei tarvitse tehdä mittauksia. Esimerkiksi ETRS89 (European Terrestrial Reference System 89) on koordinaattijärjestelmä, joka yhtyy maailmanlaajuiseen ITRS-järjestelmään (International Terrestrial Reference System) epookkina 1989.0. (Ks. luku 3.1.3)

### 1.2 Geodeettinen koordinaatisto

Koordinaattijärjestelmä realisoidaan Maan pinnalle mittaamalla joukko kiintopisteitä, joille määritetään koordinaatit kyseisessä koordinaattijärjestelmän mukaisessa *koordinaatistossa*. Ylimmän luokan kiintopisteet määrittävät siis koordinaatiston, jossa mittauksia ja pisteistön tihennyksiä voidaan jatkossa suorittaa. Tätä ylimmän luokan koordinaattiverkkoa kutsutaan myös *koordinaattijärjestelmän realisaatioksi*. EUREF-FIN-koordinaatisto on ETRS89-koordinaattijärjestelmän realisaatio Suomessa.

### 1.3 Karttaprojektio

Kolmiulotteisen maailman esittämiseksi kaksiulotteisella karttatasolla, on valittava *karttaprojektio*, jolle kolmiulotteiset koordinaatit projisoidaan. Karttaprojektion valinnasta johtuen tasokoordinaatit eivät ole samalla tavalla yksikäsitteisiä kuten maantieteelliset tai kolmiulotteiset suoraikulmaiset koordinaatit. Maan kaarevaa pintaa ei voida esittää tasolla virheettömästi, joten karttaprojektioihin ja tasokoordinaatistoihin liittyvät aina projektiovirheet. Projektioihin liittyviä ominaisuuksia ovat oikeapintaisuus, -pituisuus ja -kulmaisuus, joista aina osa vääristyy valitusta karttaprojektioista johtuen. Yleisimmät karttaprojektioityypit ovat taso-, kartio- ja lieriöprojektiio.

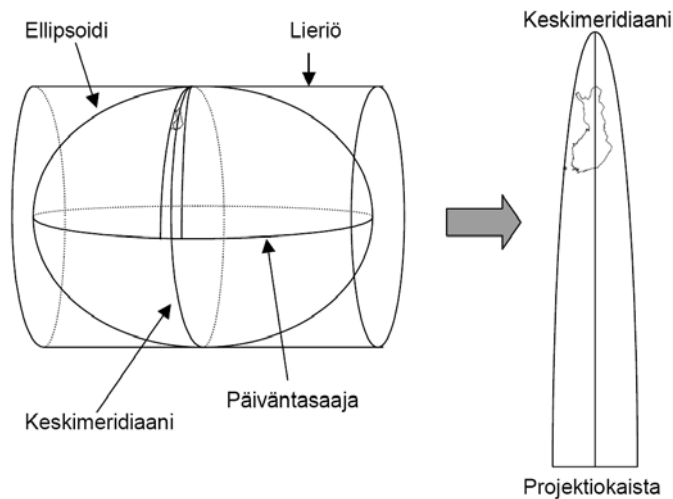
Suomessa maastokartoissa käytetään yleisesti poikittaisia lieriöprojektiioita (Kuva 1), koska ne soveltuvat hyvin pitkien pohjois-etelä-suuntaisten alueiden kuvaamiseen. Lieriöprojektiossa kohteet kuvataan vertausellipsoidia sivuavalle (Gauss-Krüger) tai leikkaavalle (UTM) lieriölle, joka leikataan auki tasoksi. Lieriöprojektiot ovat konformisia eli kulmat ja pituussuhteet säilyvät paikallisesti oikeina. Lieriöprojektioiden keskimeridiaanin itä-koordinaatille annetaan yleensä jokin suuri luku (usein 500 000 m) negatiivisten koordinaattiarvojen välttämiseksi.

Suomessa Kartastokoordinaattijärjestelmän (kkj) kanssa käytetään Gauss-Krüger-projektiota (GK) ja EUREF-FIN:n kanssa on määritelty UTM- ja GK-projektioita käyttötarkoituksesta riippuen. Inspire-direktiivin mukaisesti Suomessa voidaan käyttää myös Lambertin projektioihin perustuvia tasokoordinaatistoja ETRS-LAEA (Lambert Azimuthal Equal Area) ja ETRS-LCC (Lambert Conformal Conic), mutta niiden käyttötarkoitus yleiseurooppalaiseen kuvaukseen ja

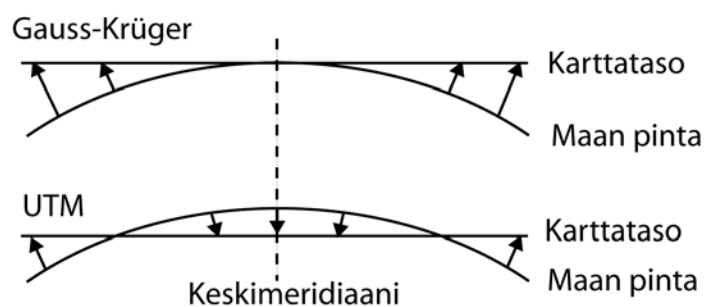
pienimittakaavaisissa kartoissa on tämän julkaisun aiheen ulkopuolella ja siksi niitä ei käsitellä tässä tiedotteessa.

Kuva 2 esittää Suomessa käytössä olevien Gauss-Krüger (GK) ja UTM-projektioiden mittakaavavirheen käyttäytymisen. Gauss-Krüger-projektio on keskimeridiaanilla mittatarkka, mutta sen mittakaavavirhe suurenee siirryttäessä pois päin keskimeridiaanilta. 400 km:n päässä keskimeridiaanilta GK-projektion virhe on 1962 ppm mikä vastaa 19.62 senttimetriä 100 metrin matkalla eli 100 metrin matka on kartalla 100.1962 m.

UTM-projektion mittakaavakerroin keskimeridiaanilla on 0.9996. UTM:n mittakaavavirhe pienenee aluksi siirryttäessä keskimeridiaanilta pois päin. Noin 180 kilometrin päässä leikkausetäisyydellä keskimeridiaanista UTM-projektion mittakaavavirhe on nolla. Siirryttäessä kauemmas mittakaavavirhe kasvaa ja 400 km:n päässä UTM:n keskimeridiaanista mittakaavavirhe on 1563 ppm. (ks. JHS 154). Tämä tarkoittaa sitä, että projisoidut etäisyydet ja pinta-alat ovat keskimeridiaanilla liian pieniä, leikkausetäisyydellä todellisia ja projektiokaistan reunoilla liian suuria. Poikittaisen lieriöprojektion vääristymiä voi pienentää käyttämällä kapeita projektiokaistoja, mutta kapeita kaistoja käytettäessä ongelmaksi tulee tarve vaihtaa projektiokaistaa useammin.



**Kuva 1.** Poikittaisen lieriöprojektion havainnekuva (JHS154).



**Kuva 2.** Gauss-Krüger ja UTM-projektioiden mittakaavavirheiden käyttäytyminen (nuolet) keskimeridiaanilta kaistan reunoille kuvattuna lieriön sivulta. Nuolen pituus kuvastaa projektiovirheen suuruutta, positiivisena ylöspäin ja negatiivisena alaspäin.

## 2 Kartastokoordinaattijärjestelmä (kkj)

Kartastokoordinaattijärjestelmä (kkj) on 1900-luvulla tehtyihin kolmiomittauksiin perustuva koordinaatisto, joka on vielä laajassa käytössä. Esimerkiksi useimmat kunnat käyttävät Kartastokoordinaattijärjestelmää tai muita kolmiomittauksiin perustuvia järjestelmiä. Tässä luvussa kuvaillaan lyhyesti kkj:n luomiseen käytettyä mittaustekniikkaa sekä pääpiirteittäin kkj:ää ja sitä edeltäneitä valtakunnallisia koordinaatistoja.

### 2.1 Kolmiomittaus

Kolmiomittauksella on aikojen kuluessa määritetty Maan muotoa ja luotu koordinaattijärjestelmiä. Kolmiomittauksia on tarvittu, jotta kartoista on voitu valmistaa entistä tarkempia ja realistisempia.

Ranskalainen kreivi Pierre-Louis Moreau de Maupertuis suoritti Suomen ensimmäiset kolmiomittaukset Torniojokilaaksossa vuosina 1736–1737. Mittausten tarkoituksena oli määrittää onko maapallo navoiltaan litistynyt vai venynyt. 1800-luvulla mitattiin Suomen kautta etelästä pohjoiseen kulkenut Struven ketju (Venäläis-skandinaavinen astemittaus). Ketju ulottui Mustalta mereltä aina Jäämerelle asti. 1800-luvulla ja 1900-luvun alussa pääasiassa venäläisten sotilaiden toimesta suoritettiin Suomessa kolmiomittauksia ja kartoitustoimintaa.

Lähes välittömästi Suomen itsenäistymisen jälkeen vuonna 1918 perustettiin Geodeettinen laitos. Geodeettisen laitoksen päätehtäväksi asetettiin I luokan kolmiomittaus Suomessa. Mittausten tarkoituksena oli luoda yhtenäisessä koordinaatistossa koko valtakunnan kattava ylimmän luokan valtakunnallinen kiintopisteverkko. Vuonna 1919 alkanut mittaustyö saatiin päätökseen vuonna 1987 (Kuva 3).

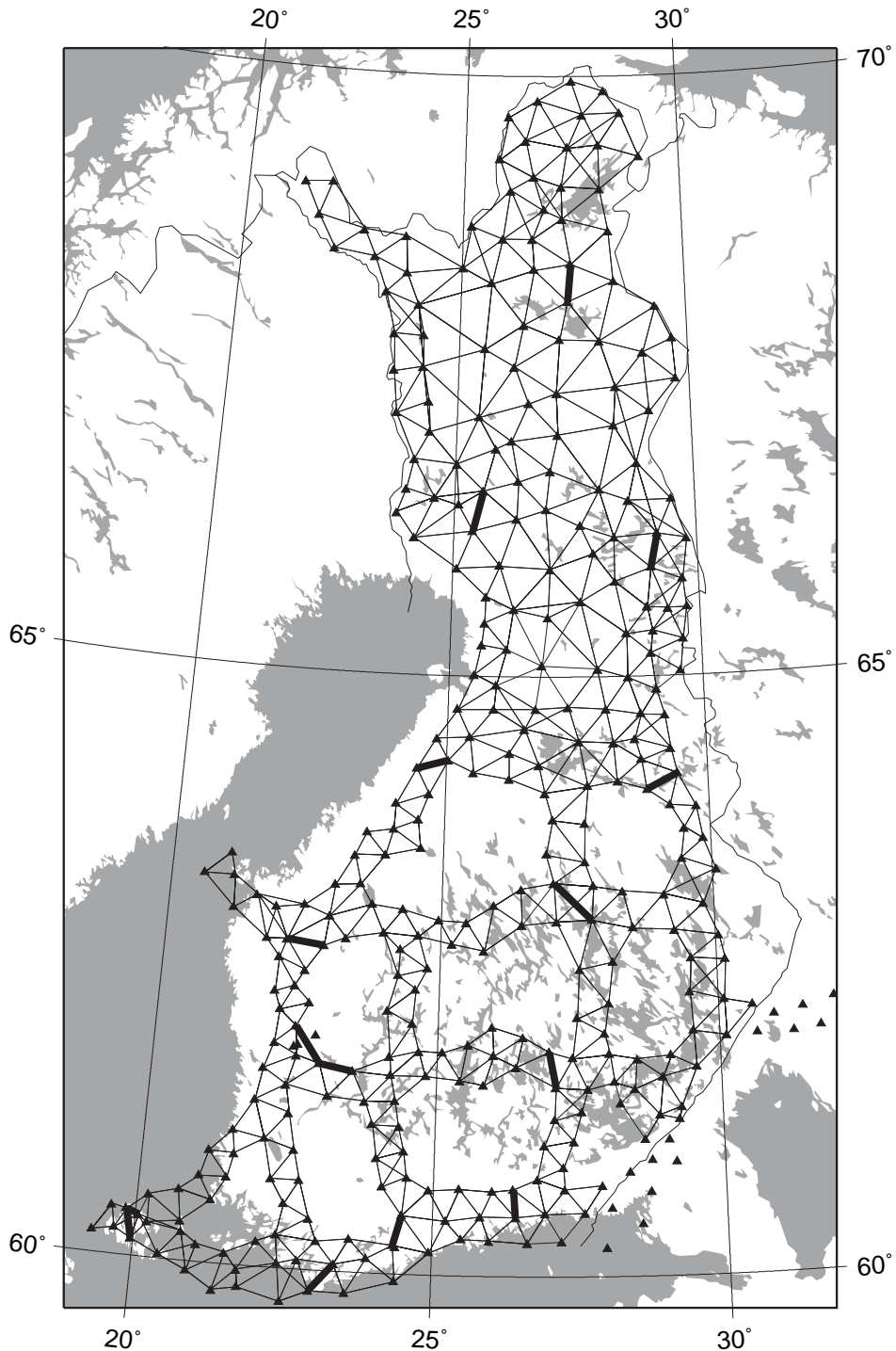
Kolmiomittaus koostuu kolmesta mittausmenetelmästä ja se perustuu geometriseen tosiasiaan, että kun tunnetaan kolmion kaksi kulmaa ja yksi sivu, voidaan kaksi muuta sivua määrittää kulmahavainnoista laskemalla. Kolmiomittauksessa tosin havaittiin kaikki kulmat ylimäärityksen saamiseksi. Etäisyydet mitattiin I luokan kolmiomittauksessa invarlangoilla ja kulmat teodoliitilla. Tähtitieteellisten mittausten avulla kolmioverkko sijoitettiin oikeaan paikkaan ja asentoon Maan pinnalla.

I luokan kolmioverkko suunniteltiin siten, että kolmioiden sivujen pituudet olivat 30–50 kilometriä ja kolmioiden kulmat vähintään 40°. Mitattujen kulmien keskivirheiksi sallittiin enintään 0.3". Tähysmerkkeinä käytettiin vain valaistuja pisteitä. (Korhonen, 1966). Geodeettinen laitos mittasi Etelä- ja Keski-Suomeen laajoja kolmioketjujen muodostamia silmukoita ja Maanmittaushallitus suoritti niiden sisään tihennysmittaukset, jotta koordinaatit saatiin nopeasti käyttöön. Kolmiomittausten ensimmäinen vaihe saatiin päätökseen vuonna 1962, jolloin kolmioketjut ulottuivat pohjoisimpaan Suomeen. Pohjois-Suomessa Geodeettinen laitos suoritti silmukoiden väliin jäävien alueiden tihennysmittaukset 1970- ja 1980-luvuilla.

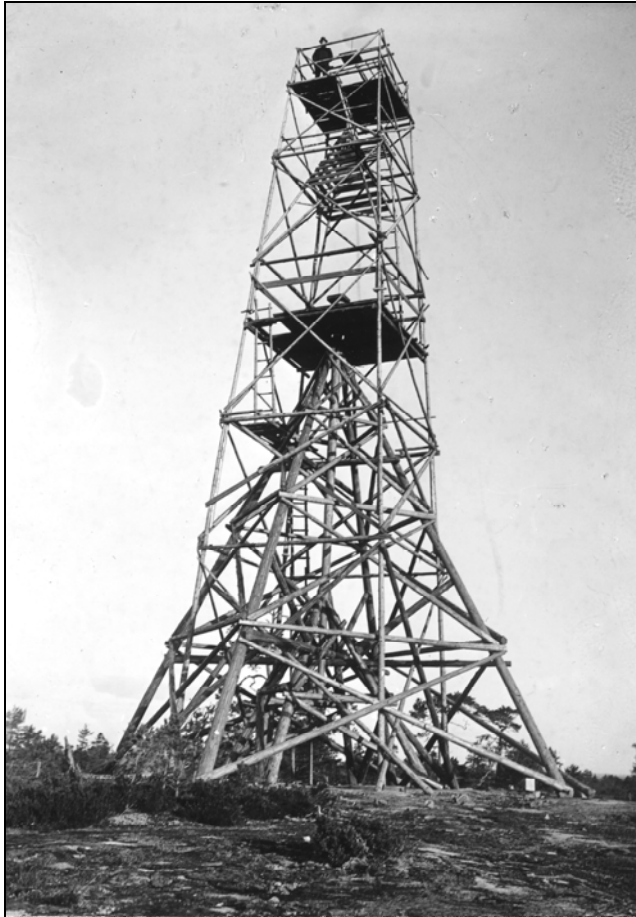
#### 2.1.1 Kulmien mittaaminen Suomen I luokan kolmioverkossa

Yleisesti tunnetuin osa kolmiomittauksesta on kulmien mittaaminen. Jokaisella kolmiopisteellä suoritettiin kulmahavainnot muihin pisteeltä näkyviin kolmiopisteisiin. Pisteille rakennettiin yleensä kolmiomittaustornit havaitsemisen mahdollistamiseksi ja aivan maanpinnan lähellä voi-

makkaimmin vaikuttavan refraktion pienentämiseksi. Tähtäyskohteena olevalla pisteellä käytettiin I luokan kolmiomittauksissa aina valolähdettä, jolloin kohdistaminen onnistui tarkemmin. Havaintopöydällä oleva mittausmerkki sidottiin varsinaiseen kiintopisteeseen keskistysmittauksin.



**Kuva 3.** Suomen I luokan kolmioverkko vuonna 1987, jolloin se oli kokonaisuudessaan mitattu. Paksuin viivoin on merkitty verkon perussivut, joiden pituus on johdettu perussivuoista suurennusverkkojen avulla. Venäjän alueella on näkyvissä ennen toista maailmansotaa Karjalaan mitatut pisteet. Kuva: Jorma Jokela.



**Kuva 4.** Perniön kolmiomittaustorni vuodelta 1921. Havaintopöytä on sisätornissa ja havaitsijan lava sen ympärillä ulkotornissa. Sisä- ja ulkotornit eivät missään kohtaa kosketa toisiinsa. Torni on kaksikerroksinen; kulmien mittaukset suoritettiin alemmalta tasolta ja valaistus ylempältä tasolta. Kuva: Geodeettisen laitoksen arkisto.

Kolmiomittaustornit rakennettiin I luokan kolmiomittauksissa aina kaksinkertaisiksi eli ulompi torni oli havaitsijaa varten ja sisempi torni havaintolaitteistoa varten. Tornit eivät missään kohtaa koskettaneet toisiaan, jolloin havaitsijan ja kirjurin liikkeet eivät tärisyttäneet havaintokojetta. Osa korkeista torneista oli kaksikerroksisia. Havaintopöytä oli alempana ja valaisuteline sijaitsi ylempällä tasolla (Kuva 4).

Alkuvuosina jokaisessa tornissa oli valomies hoitamassa pisteen valaisun. Valaistus hoidettiin joko heliotroopilla tai sähkövalolla. Heliotroopilla auringon valo heijastettiin kahden peilin avulla kulmahavaintoja tekevää tornia kohti. Auringon liikkeen vuoksi valaisijan tuli jatkuvasti säätää peilejä.

Sähkövalon käyttö oli valaistuksessa helpompaa. Siinä valonheittimen parabolisen peilin polttopisteeseen asetettiin hehkulampun poltin ja yhdensuuntainen valokimppu suunnattiin torniin, jossa kulmahavaintoja tehtiin. Myöhemmin lamput varustettiin ajastimilla, jolloin jokaisessa tornissa ei enää tarvittu valoista vastaavaa henkilöä.

Kulmia havaittiin pääasiassa 24 havainnon sarjoissa (osa pisteistä on mitattu myös 20 havainnon sarjoina) siten, että sarjojen välissä kojeen jakokehää kierrettiin systemaattisten virheiden minimoimiseksi. Jokainen havainto kohdistettiin kolme kertaa ja kulmat havaittiin aina kahdessa kojeasennossa (Kuva 5).

Havaitseminen suoritettiin pääasiassa illan ja iltayön aikana. Kaikkia sarjoja ei havaittu kerralla vaan vähintään kolmena eri iltana. Mittaukset keskeytettiin mikäli olosuhteet lämpöväreilyn tai muun syyn seurauksena muuttuivat sellaisiksi, ettei kojeen tarkka kohdistaminen onnistunut. Tarkempi kuvaus käytetyistä menetelmistä löytyy mm. lähteestä Korhonen (1966).



**Kuva 5.** Tauno Honkasalo tekemässä havaintoja Hildebrandin teodoliitilla Oulun kolmiopisteellä vuonna 1938. Kuva: Geodeettisen laitoksen arkisto.

### 2.1.2 Tähtitieteelliset mittaukset I luokan kolmiomittauksissa Suomessa

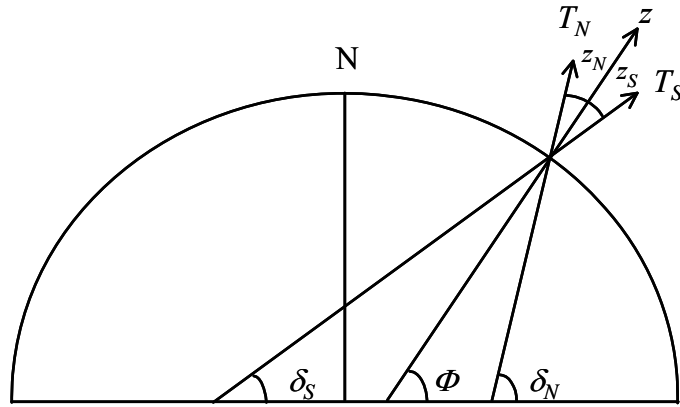
Tähtitieteelliset koordinaatit mitattiin Suomen I luokan kolmioverkossa jokaisella pisteellä. Tähtitieteellisten koordinaattien avulla kolmioverkko saatiin orientoitua oikeaan paikkaan ja asentoon Maan pinnalle.

*Tähtitieteellinen latitudi* eli *leveysaste* havaittiin Suomen I luokan kolmioverkossa Horrebrow-Talcottin keinolla. Menetelmässä valitaan tähtipari, josta toinen tähti kulminoi eli ohittaa meridiaanin zeniitin pohjoispuolella ja toinen eteläpuolella. Leveysaste saadaan kaavasta:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\delta_S + \delta_N) + \frac{1}{2}(z_S - z_N) + \text{korjaustermit}, \quad (2.1)$$

missä  $\delta_S$  on etelätähden ja  $\delta_N$  pohjoistähden deklinaatio, sekä  $z_S$  ja  $z_N$  tähtien havaitut erot zeniittietäisyyksissä (Kuva 6). Tähtipari valitaan siten, että tähtien zeniittietäisyydet ovat suunnilleen samansuuruisia. Tällä pyritään eliminoimaan refraktiovirheen vaikutus. Määrittystarkkuuden parantamiseksi havaittiin useita tähtipareja useina eri öinä. Havainnot suoritettiin ohikulkukokojeella (Kuva 7). (Ollikainen, 1982).





**Kuva 6.** Horrebow-Talcott:n menetelmän periaate.

Tähtitieteellisen *longitudin* eli *pituusasteen* määrittämiseksi ohikulkukokeella havaittiin myös tähtien meridiaanin ohikulkuaajat. Paikallinen tähtiaika sillä hetkellä kun tähti ohittaa etelämeridiaanin on sama kuin tähden rektaskensio  $\alpha$ . Jos kronometri osoittaa havaintohetkellä aikaa  $t$ , on kronometrin korjaus

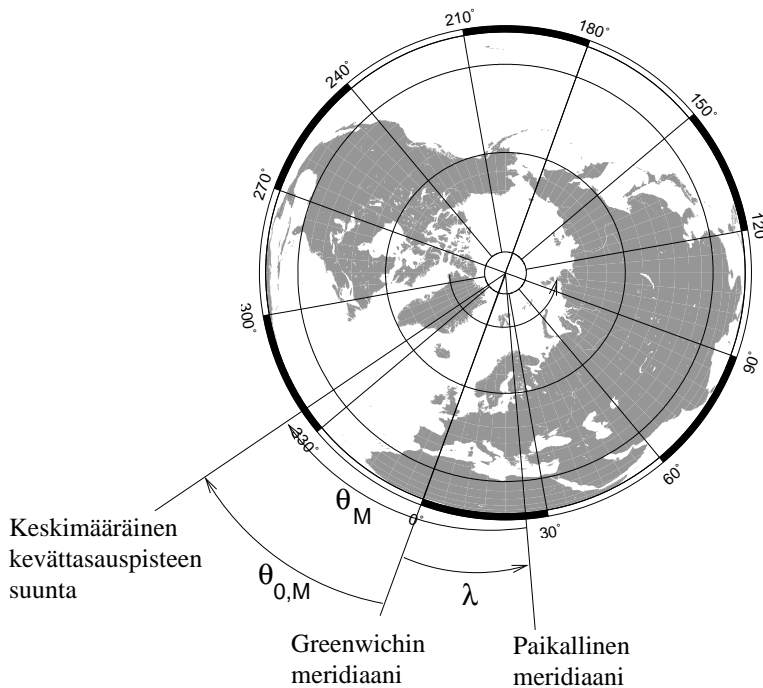
$$\Delta U = \alpha - t . \quad (2.2)$$

Kahden paikan maantieteellisten pituuksien ero on sama kuin näillä paikoilla havaittujen paikallisaikojen erotus (kuva 8). Pituusasteen määrittämiseksi on siis tiedettävä Greenwichin paikallisaika havaintohetkellä. Tämä saadaan radion aikamerkkien avulla. Greenwichin aikamerkkiä käyttäen suoritetaan kellonvertaus, ts. havaitaan kronometrin ja Greenwichin ajan erotus  $S$ . Havaintopaikan pituusaste  $\Lambda$  saadaan nyt suoraan (Rainesalo, 1927)

$$\Lambda = S + \Delta U . \quad (2.3)$$



**Kuva 7.** Matti Ollikainen suorittaa astronomista paikanmäärittystä Ertegvarrin kolmiopisteellä Utsjoella vuonna 1987. Kuva: Raimo Konttinen.



**Kuva 8.** Tähtiajan ja pituusasteen  $\lambda$  välinen yhteys. Paikallinen tähtiaika  $\theta_M$  ja Greenwichin tähtiaika  $\theta_{0,M}$  mitataan keskimääräisen kevättasauspisteen suuntaan.

Tähtien ylikulku aika mitattiin ”silmä ja korva” -menetelmällä eli kronometrin nakutuksen avulla arvioitiin sekunnin kymmenyksen tarkkuudella tähden ylikulku ohikulkukojeessa. Mittaukset kiinnitettiin Helsingin meridiaaniin ns. persoonallisen yhtälön avulla, jolla pyrittiin eliminoimaan mittaajasta ja mittauskalustosta johtuvat systemaattiset virheet. Näiden arviointiin käytettiin Helsingin yliopiston tähtitornilla tehtyjä havaintoja.

*Tähtitieteellinen atsimuutti* määritettiin mittaamalla Pohjantähden ja zeniitin kautta kulkevan tason ja maanpäällisen kohteen (toisen kolmiopisteen) välinen kulma. Havaintopaikan tähtitieteellisten koordinaattien avulla laskettiin Pohjantähden ja pohjoissuunnan välinen kulma, jolloin atsimuutti saatiin vähentämällä tai lisäämällä havaitusta kulmasta Pohjantähden ja pohjoissuunnan välinen kulma. Pistettä, jolle tähtitieteellisten koordinaattien lisäksi on määritetty tähtitieteellinen atsimuutti, kutsutaan Laplace-pisteeksi.

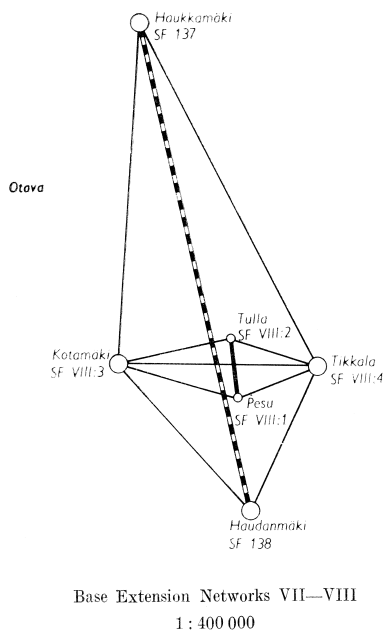
Suomen I luokan kolmioverkossa aluksi jokaisesta kolmiopisteestä tehtiin Laplace-piste, mutta vuodesta 1936 lähtien vain noin joka kolmannelle pisteelle. Tarkempi kuvaus käytetyistä menetelmistä löytyy mm. lähteistä Ollikainen (1977, 1982).

### 2.1.3 Perusviivan mittaukset Suomen I luokan kolmioverkossa

Perusviivan mittaukset suoritettiin I luokan kolmioverkossa 24 metrin mittaisilla invarlangoilla (Kuva 10), joiden avulla mitattiin muutaman kilometrin pituisia perusviivoja. Perusviivan pituus siirrettiin suurennusverkon ja kulmanmittausten avulla kolmion 30–50 km pituisen perusviivan pituudeksi (Kuva 9). Perusviivoja oli mitattava riittävän tiheästi koko verkon alueelle, jotta mitataksa pysyi mahdollisimman vakiona. Suomeen perusviivoja on mitattu 100–200 kilometrin välein. Perusviivojen pituudet olivat 2.6–6.2 km ja mittausepävarmuus 0.5–2 mm (Jokela, 1994).

Mittauksessa käytettyjä invarlankoja kalibroitiin säännöllisesti. Invarlangat kalibroitiin ensin Santahaminan vertausperusviivalla ja vuodesta 1934 Nummellan perusviivalla. Vuoden 1947 jälkeen Nummellan perusviivan pituus määritettiin Väisälä-komparaattorilla. Perusviivan pituus

määritettiin monistamalla noin metrin mittaisen kvartsimetrin pituutta perusviivan etäisyyksiksi valkoisen valon interferenssiä käyttäen. Nummelan perusviivan pituus on määritetty vuosien kuluessa useita kertoja epävarmuuden ollessa aina alle 0.1 mm (n. 0.1 ppm) 864 metrin matkalle (mm. Jokela ja Häkli, 2006). Nummelan perusviivalla kalibroittujen invarlankojen pituuden ja siten kolmioverkon mittakaavan määritti kvartsimetri, joka absoluuttikalibroinnin kautta liitti verkon mittakaavan metrin määritelmään. Tarkempi kuvaus Väisälä-komparaattorin periaatteesta ja perusviivamittauksista löytyy mm. julkaisuista Väisälä (1923), Honkasalo (1950), Kukkamäki (1978), Jokela (1994) ja Jokela ja Poutanen (1998).



**Kuva 9.** Otavan perusviiva ja suurennusverkko. Paksu musta viiva (Tullasta Pesuun) mitattiin invarlangoilla, jonka jälkeen kulmahavainnoilla perusviivan pituus siirrettiin perussivun pituudeksi (katkoviiva). Kuva: Korhonen et al., 1959.



**Kuva 10.** Invarlankamittausta Ilmajoella vuonna 1930. Apumiehinä on varusmiehiä ja kirjuriina ylioppilas. Taustalla on suurennusverkkoon kuulunut torni. Invarlanka on pingotettu 10 kg:n punnuksien avulla, jotta vetojännitys jokaisessa mittauksessa on tarkalleen sama. Kuva: Geodeettisen laitoksen arkisto.

## 2.2 Kolmiomittauksella muodostetut koordinaattijärjestelmät

Kolmiomittausten edetessä Suomeen määritettiin useita koordinaatistoja, mutta käytännössä merkittävimpiä ovat olleet Helsingin järjestelmä (valtion vanha järjestelmä, vvj) ja Kartasto-koordinaattijärjestelmä (kkj).

### 2.2.1 Helsingin järjestelmä (valtion vanha järjestelmä, vvj)

Maanmittaushallitus muodosti Helsingin järjestelmän (myöhemmin kutsuttu myös valtion vanhaksi järjestelmäksi, vvj), joka perustui Geodeettisen laitoksen suorittamaan I luokan kolmiomittaukseen. Helsingin järjestelmän vertausellipsoidiksi valittiin Hayfordin ellipsoidi (Kansainvälinen ellipsoidi 1924). Hayfordin ellipsoidi ei ole geosentrinen vaan sijaitsee Maan massakeskipisteeseen nähden siten, että se kuvaa Maan muotoa parhaiten Euroopan alueella. Hayfordin ellipsoidin keskipiste poikkeaa Maan massakeskipisteestä lähes 200 metriä.

Helsingin järjestelmä otettiin käyttöön, kun koordinaatiston lähtöpisteeksi valitulle Helsingin Kallion kirkon tornissa olevalle I luokan kolmiopisteelle oli vuoteen 1924 mennessä määritetty tähtitieteelliset koordinaatit ja lähtöatsimuutti. Luotiviivan poikkeamia ei vielä tunnettu, joten lähtöpisteen maantieteellisiksi koordinaateiksi otettiin tähtitieteelliset koordinaatit. Pisteellä on todellisuudessa huomattava luotiviivan poikkeama, mistä aiheutui suuret laskennalliset luotiviivan poikkeamat myös verkon muille pisteille. (Ölander, 1963)

Karttaprojektiksi valittiin Gauss-Krüger-projektio, joka on poikittainen kulmatarkka lieriöprojektio (ks. kappale 1.3). Suomi jaettiin neljään  $3^\circ$  leveään kaistaan, jotta vältyttiin suurilta projektiovirheiltä. Kaistojen keskimeridiaanit olivat  $21^\circ$ ,  $24^\circ$ ,  $27^\circ$  ja  $30^\circ$  itään Greenwichistä. Järjestelmän  $x$ -koordinaatit (pohjoiskoordinaatti) laskettiin päiväntasaajalta ja  $y$ -koordinaateille (itäkoordinaatti) annettiin keskimeridiaanin kohdalle lukema 500 000 m negatiivisten arvojen välttämiseksi.  $y$ -koordinaatin eteen laitettiin kyseisen projektioakaistan keskimeridiaanin asteluku. Projektioakaistojen reunoilla laskettiin puolen pituusasteen leveydeltä koordinaatit molemmissa kaistoissa. (Gustafsson, 1928)

Helsingin järjestelmän tarkkuus ei ollut homogeeninen, koska verkkoa tasoitettiin paloittain mittausten edetessä ja siitä aiheutui virheiden kasautumista. Helsingin järjestelmä oli Maanmittaushallituksen käytössä aina vuoteen 1970 asti, jolloin käyttöön otettiin Kartastokoordinaattijärjestelmä eli kkj.

### 2.2.2 European Datum 1950 (ED50) ja Suomen kolmioverkon tasoitus 1956–1966 (1966 yhteistasoitus)

ED50 on 1950-luvulla tehty Euroopan kolmioverkkojen yhteistasoitus, jonka tuloksena saatiin Länsi-Euroopan kattava yhtenäinen koordinaatisto. Tasoitus jaettiin useampaan lohkoon ja Suomen pisteet sisältyneen pohjoisen lohkon laski U.S. Coast and Geodetic Survey. Osasta Länsi-Eurooppaa ei vielä ollut riittävän tarkkoja kolmioverkkoja ja esimerkiksi Pohjois-Suomen pisteet puuttuivat tasoituksesta (Whitten, 1952). ED50:ssä vertausellipsoidina on Hayfordin ellipsoidi.

Suomen I luokan kolmioverkko tasoitettiin vuosina 1956–1966. Kansallisessa tasoituksessa olivat mukana kaikki vuosina 1920–1962 suoritettut I luokan kolmioverkon havainnot. Kolmioverkko käsitti 291 kolmiopistettä, 374 kolmiota ja 4200 kilometriä pääasiassa yksinkertaisia kolmioketjuja. Tasoitus suoritettiin kolmessa osassa: Etelä-Suomi ja Pohjois-Suomi omina loh-

koinaan ja lopuksi nämä yhdistettiin liitosketjun avulla. Tasoitustyö aloitettiin jo vuonna 1956 eteläisen Suomen osalta. Pohjois-Suomen verkon tasoitus aloitettiin kun kolmiomittausten ensimmäinen vaihe saatiin päätökseen. Liitosketjuna käytettiin itä-länsi-suuntaista ketjua, joka sijoittui leveyspiirille n.  $63^\circ$  pohjoista leveyttä. Painoyksikön keskivirhe oli tasoituksessa  $\pm 0.302''$ . (Korhonen, 1967)

Tasoitettujen havaintojen perusteella laskettiin lopuksi koordinaatit kaikille kolmiopisteille ottaen Simsiön kolmiopisteen yhteiseurooppalaisesta tasoituksesta saadut ED50-koordinaatit lähtökoordinaateiksi. Orientointi suoritettiin liitosketjun Laplace-pisteiden tähtitieteellisten atsimuuttien avulla. Tuloksena saatiin 291:n I luokan kolmiopisteen koordinaatit. (Korhonen, 1967). Näin saatuja ED50-koordinaatteja ei Suomessa käytetty yleisissä kartoitustöissä, vaan verkon sisäinen tarkkuus siirrettiin kkj-koordinaatistoon.

### 2.2.3 Kartastokoordinaattijärjestelmän (kkj) luonti

Koska Helsingin järjestelmän heikkoudet olivat tiedossa ja koko Suomen I luokan kolmioverkko oli tasoitettu, Maanmittaushallitus päätti vuonna 1970 ottaa käyttöön uuden koordinaatiston, *Kartastokoordinaattijärjestelmän (kkj)*. Sen karttaprojektiksi valittiin Gauss-Krüger-projektio, joka oli käytössä jo Helsingin järjestelmässä. Myös vertausellipsoidiksi valittiin Helsingin järjestelmän mukaisesti Hayfordin ellipsoidi.

Alun perin kaistoja määritettiin neljä. Helsingin järjestelmän tavoin  $y$ -koordinaattiin (itä-koordinaatti) lisättiin 500 000 m. Sekaannuksen välttämiseksi projektiokaistat kuitenkin numeroitiin siten, että keskimeridiaanilla  $21^\circ$  kaista sai numeron yksi,  $24^\circ$  numeron kaksi,  $27^\circ$  numeron kolme ja  $30^\circ$  numeron neljä. Kaistan numero lisättiin  $y$ -koordinaatin eteen. (MMH, 1970). Myöhemmin lisättiin vielä kaistat, joiden keskimeridiaanit ovat  $18^\circ$  ja  $33^\circ$  ja kaistanumerot 0 ja 5.

Keskimeridiaanin  $27^\circ$  suhteen projisoidulle koko maan kattavan projektiokaistan levyiselle koordinaatistolle annettiin nimeksi *Yhtenäiskoordinaatisto (ykj)*. Vanhoille peruskartoille ja vanhoihin topografisiin karttoihin Yhtenäiskoordinaatisto merkittiin punaisena koordinaattiruudustona. (MMH, 1970)

Helsingin järjestelmän koordinaatit poikkesivat tasolle projisoiduista ED50-koordinaateista (vuoden 1966 yhteistasoitus)  $x$ -koordinaatin osalta yli 50 metriä ja  $y$ -koordinaatin osalta yli 100 metriä. Näin suuret erot olisivat tulleet näkyviin 1:20 000 peruskartoilla yli 5 mm:n suuruisena virheenä. Koordinaattierot johtuivat suurelta osin siitä, että Helsingin järjestelmän maantieteelliseksi lähtökoordinaateiksi oli otettu lähtöpisteen astronomiset koordinaatit. Vuoden 1966 yhteistasoituksessa otettiin huomioon koko verkon luotiviihanpoikkeamat ja tasoituksen lähtökoordinaatit oli saatu ED50-tasoituksesta. Näin ollen ED50-verkko pystyttiin sijoittamaan tarkemmin Maan pinnalle.

Vaikka olisi ollut luontevaa siirtyä ED50-järjestelmään, haluttiin Kartastokoordinaattijärjestelmän poikkeavan mahdollisimman vähän Helsingin järjestelmästä. Kartastokoordinaattijärjestelmä muodostettiin siten, että maantieteelliset ED50-koordinaatit muunnettiin tasokoordinaateiksi ( $x_{ED50}, y_{ED50}$ ) koko maan kattavassa Gauss-Krüger-projektiossa, jonka keskimeridiaani oli  $27^\circ$ . Tämän jälkeen ED50- ja Helsingin järjestelmien 202 yhteisen pisteen avulla suoritettiin neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnos. Muunnos merkitsi sitä, että ED50-koordinaatistoa siirrettiin ja kierrettiin siten, että se yhtyi mahdollisimman hyvin Helsingin järjestelmään.

Muunnos ED50-järjestelmästä kkj:ään tehtiin seuraavilla kaavoilla (MMH, 1970):

$$\begin{aligned}x_{kkj} &= -61.571 + 1.00000075 \cdot x_{ED50} - 0.00000439 \cdot y_{ED50} \\y_{kkj} &= 95.693 + 1.00000075 \cdot y_{ED50} + 0.00000439 \cdot x_{ED50}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Muunnoskaavojen avulla kaikille I luokan kolmiopisteille laskettiin kkj-koordinaatit ( $x_{kkj}$ ,  $y_{kkj}$ ), jotka muunnettiin vielä omiin projektiokaistoihinsa, ja jotka toimivat lähtöpisteistönä kkj-koordinaatistolle. Edellä mainitulla tavalla lasketut kkj-koordinaatit poikkesivat Helsingin järjestelmän koordinaateista Etelä-Suomessa korkeintaan kolme metriä ja Pohjois-Suomessa vain poikkeustapauksessa yli neljä metriä. (MMH, 1970)

Vuoden 1966 yhteistasoituksen sisäinen tarkkuus (pisteiden keskinäinen yhteensopivuus) pystyttiin edellä kerrotulla menettelyllä tuomaan kkj-koordinaatistoon. Toisaalta koordinaatiston orientointi ja asemointi Maan pinnalle perustuu muunnoksen kautta Helsingin järjestelmän orientointiin ja sitä kautta Tähtitorninmäellä 1920-luvulla tehtyihin astronomisiin mittauksiin, joissa sen luotiviivanpoikkeamat asetettiin nolllaksi.

## 3 EUREF-FIN-koordinaatisto

### 3.1 Avaruusgeodeettisilla mittauksilla muodostetut globaalit koordinaatistot

Suomen ETRS89-järjestelmän kansallinen realisaatio EUREF-FIN pohjautuu avaruusgeodeettiin mittauksiin ja kansainvälisiin koordinaattijärjestelmiin. Nykyiset globaalit koordinaattijärjestelmät ovat kolmiulotteisia suorakulmaisia järjestelmiä, CTRS (Conventional Terrestrial Reference System), jossa origo on maapallon massakeskipisteessä,  $Z$ -akseli on maapallon pyörimisakselin suuntainen,  $X$ -akseli osoittaa keskimääräiseen Greenwichin meridiaaniin ja  $Y$ -akseli on kohtisuorassa edellä mainittuihin nähden (Kuva 11).

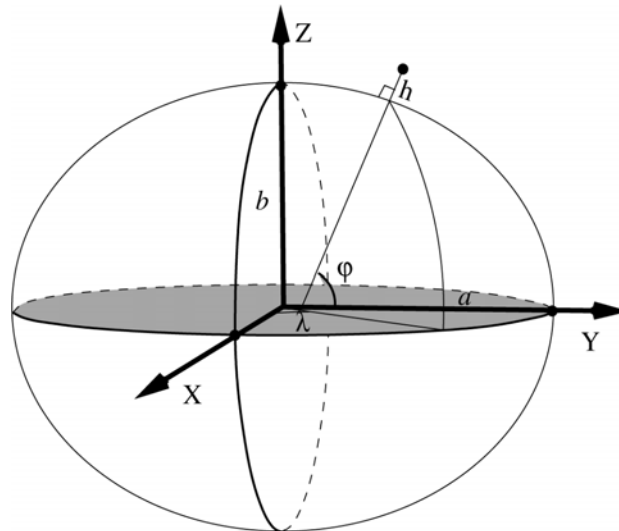
Koordinaattijärjestelmän origon ja orientoinnin lisäksi määritellään myös Maan muotoa likimäärin kuvaava referenssipinta, vertausellipsoidi. Ellipsoidin keskipiste yhtyy koordinaatiston origoon ja pikkuakseli  $Z$ -akseliin. Kahden ellipsoidin dimensiota kuvaavan parametrin (esim. isoakseli ja litistyneisyys) lisäksi vertausjärjestelmän määrittelyyn tarvitaan kaksi muuta Maata kuvaavaa parametria, jotka kiinnittävät nollameridiaanin ja painovoiman vertausellipsoidilla.

Vanhat vertausellipsoidit muodostettiin siten, että ne kuvastivat maapallon muotoa parhaiten käyttöalueellaan (Hayfordin ellipsoidi oli sovitettu eurooppalaisten havaintoverkkojen avulla). Tästä syystä ne poikkeavat uusista globaaleista vertausellipsoideista, kuten GRS80:stä, jonka muoto perustuu joka puolelta maapalloa saatuihin havaintoihin. Ennen satelliittiaikaa myöskään Maan massakeskipisteen paikkaa ei pystytty määrittämään riittävällä tarkkuudella.

1900-luvun jälkimmäisellä puoliskolla kehitetyt uudet geodeettiset havaintomenetelmät ja erityisesti satelliittitekniikka loivat mahdollisuuden mitata Maan ulottuvuuksia uudella tavalla. VLBI-, satelliittilaser-, Doppler- ja GPS-menetelmillä saavutettiin huomattavasti parempia tarkkuuksia kolmiomittauksiin verrattuna. Nyt oli ensi kertaa mahdollista mitata ja sitoa eri mantoilla sijaitsevat havaintoverkot toisiinsa senttimetrin tarkkuudella. Tällöin mannerlaattojen liikkeet ja muut globaaleihin koordinaatistoihin vaikuttavat liikkeet täytyy ottaa huomioon, ts. koordinaatit ovat ajasta riippuvia. Koordinaattien ajallisiin muutoksiin vaikuttavat myös mm. Aurion ja Kuun aiheuttamat vuoksivoimat, Maan napojen liike, paikalliset maankuoren liikkeet jne. Globaaleissa koordinaatistoissa täytyykin määritellä epookki eli ajanhetki, johon koordinaatit on sidottu.

#### 3.1.1 World Geodetic System 1984 (WGS84)

GPS:n käyttämä WGS84 on Yhdysvaltain puolustusministeriön (DoD, Department of Defence) kehittämä järjestelmä ja sen määritelmät löytyvät Yhdysvaltain armeijan karttaviraston (NGA, National Geospatial-Intelligence Agency, aiemmin NIMA, National Imagery and Mapping Agency ja DMA, Defence Mapping Agency) julkaisusta (NIMA, 2000). WGS84 tarkoittaa myös CTRS:n mukaisesti luotua kolmiulotteista suorakulmaista koordinaatistoa, jonka vertausellipsoidina on samanniminen WGS84-ellipsoidi.



**Kuva 11.** CTRS:n origo on Maan massakeskipisteessä. Z-akseli osoittaa Maan pyörahdysakselin suuntaan ja X-akseli Greenwichin meridiaaniin. Kuvassa näkyy myös CTRS:n yhteys vertausellipsoidiin.

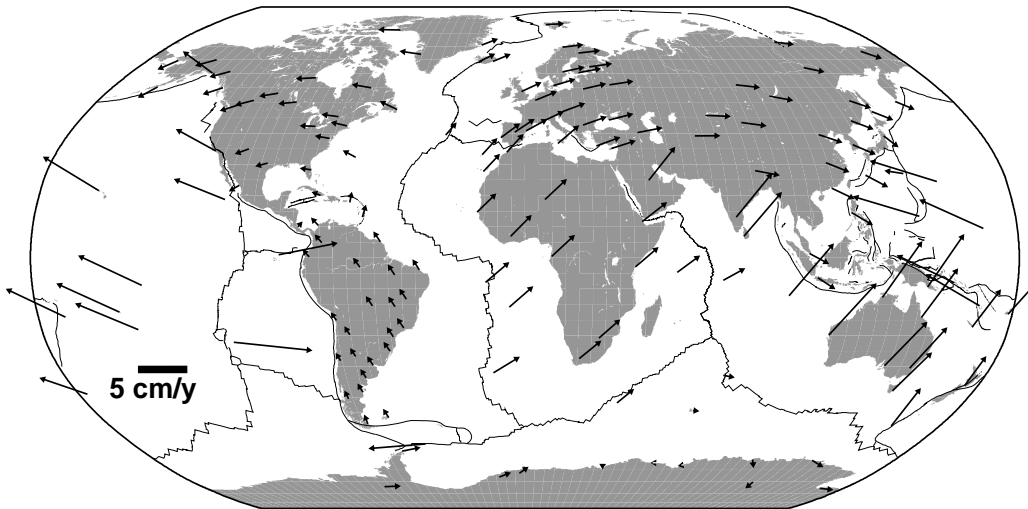
Alkuperäinen WGS84 perustui Navy Navigation Satellite System (NNSS) ja Transit Doppler järjestelmille, jotka oli sovitettu vuoden 1984 BIH:n (Bureau International de l'Heure; IERS:n edeltäjä) terrestriseen koordinaatistoon BTS. Havaintotekniikan kehittyessä määritelmää on sittemmin useaan otteeseen täsmennetty. (NIMA, 2000). WGS84:n viimeisin realisaatio on WGS84 (G1150) ja on WGS84:n kolmas päivitys. WGS84 (G1150) laskettiin 49 IGS-aseman havainnoista kahden viikon ajalta vuoden 2001 alussa ja sen koordinaatit annetaan epookissa 2001.0. WGS84 (G1150) sidottiin ITRF2000:een ja on cm-tasolla yhtenevä ITRF2000:n kanssa epookissa 2001.0. (NGA, 2006).

GPS-satelliittien lähettämät ratatiedot (Broadcast Ephemerides) ovat WGS84-järjestelmässä. Siksi GPS-paikannuksessa on käytettävä tämän kanssa yhteensopivia koordinaatistoja. Esimerkiksi ksj-koordinaatteja ei GPS-havaintojen laskennassa saa käyttää. WGS84:n määritelmässä todetaan, että se on yhtenevä sellaisten kansallisten tai alueellisten koordinaatistojen kanssa, jotka perustuvat suoraan ITRF-koordinaatistoon (NIMA, 2000). Esimerkkinä annetaan EUREF89 (European Terrestrial Reference Frame 1989). Koska Suomen kansallinen realisaatio EUREF-FIN on ETRS89-koordinaattijärjestelmän realisaatio aivan kuten EUREF89:kin (ks. luku 3.1.3), voidaan EUREF-FIN-koordinaatteja käytännön mittauksessa pitää yhteensopivina WGS84:n kanssa.

### 3.1.2 International Terrestrial Reference System (ITRS) ja sen realisaatiot

ITRS on IERS:n (International Earth Rotation and Reference Systems Service, Kansainvälisen geodeettisen assosiaation IAG:n pysyvä palvelu) ylläpitämä maailmanlaajuinen CTRS:n mukainen kolmiulotteinen suorakulmainen koordinaattijärjestelmä. Sen realisaatio ITRF (International Terrestrial Reference Frame) perustuu satelliittilaser-, kuulaser-, VLBI-, Doris- sekä GPS- ja GLONASS-havaintoihin. Mannerlaattojen liikkeen johdosta globaali koordinaatisto muuttuu jatkuvasti (Kuva 12), joten koordinaattien yhteydessä annetaan myös ajanhetki eli epookki, johon koordinaatit viittaavat, esim. ITRF2005(2007.97) tarkoittaa ITRF2005-koordinaatiston mukaisia koordinaatteja päivälle 20.12.2007 ( $354/365=0.97$ , jossa 354 on kyseisen päivän päivännumero vuoden alusta). (IERS, 2008; ITRF, 2008)

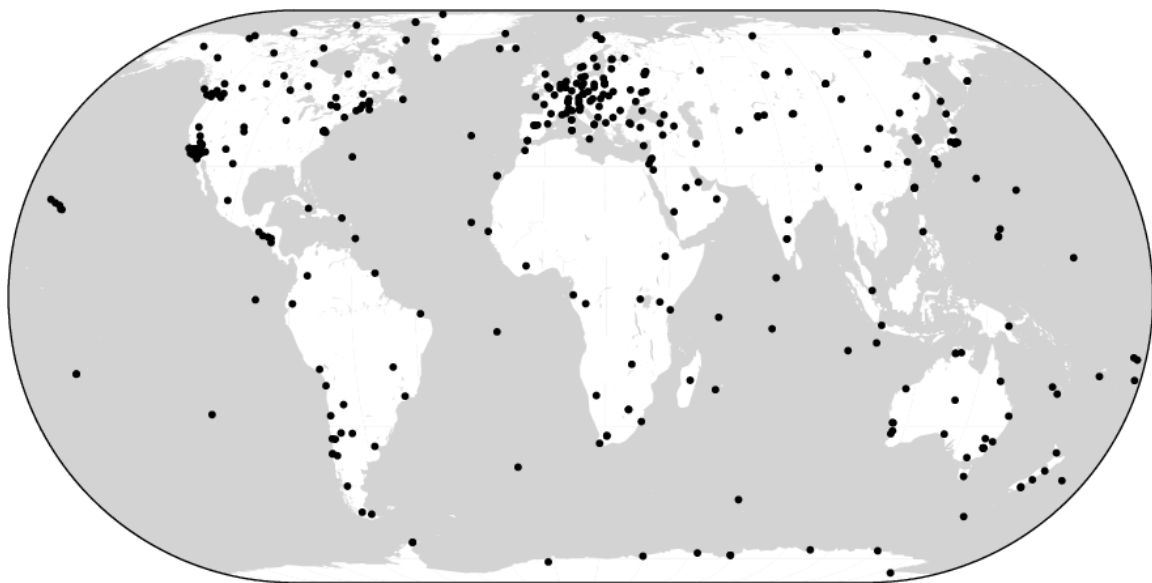




**Kuva 12.** Mannerlaattojen liikkeiden johdosta globaalit koordinaatistot muuttuvat jatkuvasti. Data: IGS.

Uusien ja tarkempien havaintojen sekä mannerlaattojen liikkeiden vuoksi ITRF-reaalisatio lasketaan aika ajoin uudelleen. Uusin on tällä hetkellä ITRF2005 ja sen julkaistujen koordinaattien epookki on 2000.0. ITRF:ään liittyvät myös koordinaatiston määrittelevien kiintopisteiden nopeuskomponentit ( $v_X$ ,  $v_Y$  ja  $v_Z$ ) ja reaalisatioiden väliset muunnosparametrit, esimerkiksi ITRF2005→ITRF96. Nopeuskomponenttien avulla koordinaatit voidaan siirtää epookista toiseen. (ITRF, 2008)

IGS (International GNSS Service) on IAG:n perustama palvelu, joka tarjoaa pysyvien GPS-asemien dataa sekä niiden avulla tehtyjä tuotteita. IGS:n pysyvien GNSS (Global Navigation Satellite System) -asemien verkkoon kuuluu yli kolmesataa havaintoasemaa (Kuva 13) sekä useita datakeskuksia ja laskentakeskuksia. IGS:n keräämää dataa käytetään mm. satelliittien ratojen laskennassa, ITRF-koordinaatiston luonnissa ja ylläpidossa, Maan pyörimisliikkeen, ionosfäärin, troposfäärin, IGS-asemien koordinaattien ja liikenopeuksien tutkimuksessa. (IGS, 2008). Datat ja tuotteet ovat vapaasti saatavissa Internetistä.



IGS 2008 Jun 25 17:02:08

**Kuva 13.** IGS-verkon GNSS-tukiasemat sijaitsevat ympäri maapalloa (IGS, 2008).

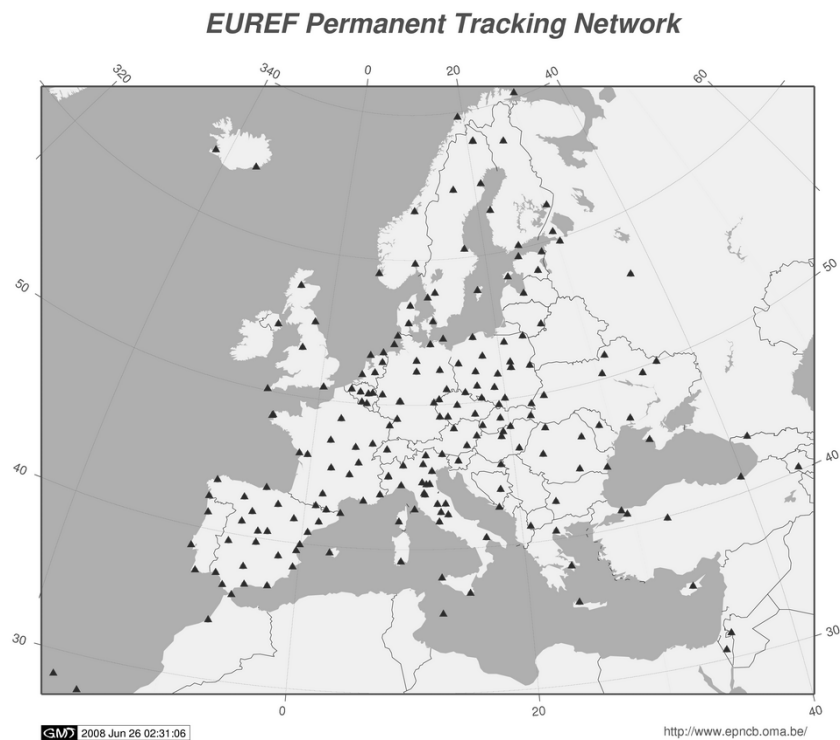
### 3.1.3 European Terrestrial Reference System 89 (ETRS89)

ITRF-koordinaatit eivät ole jokapäiväisessä toiminnassa, kuten kartoituksessa, kovin käyttökelpoisia, koska ne muuttuvat ajan kuluessa. Tästä syystä on luotu mannerlaattojen kiinteisiin (deformoitumattomiin) osiin sidottuja alueellisia koordinaatistoja.

IAG:n alakomissio EUREF (nykyään SC1.3a; IAG Reference Frame Sub-Commission for Europe) esitti vuonna 1990 Firenzen kokouksessaan, että Euroopassa tulisi siirtyä käyttämään koordinaatistoa, joka on kiinnitetty Euraasian mannerlaatan deformoitumattomaan osaan. Kokouksessa määriteltyä järjestelmää kutsutaan ETRS89:ksi (European Terrestrial Reference System 89) ja sen realisaatiota kutsutaan ETRF:ksi (European Terrestrial Reference Frame). ETRS89 yhtyy ITRS-järjestelmään epookissa 1989.0. (Boucher ja Altamimi, 1992)

Euroopan komission aloitteesta organisoitiin vuonna 1999 kokous, jonka päätöslauselmassa esitettiin ETRS89:n hyväksymistä yleiseurooppalaiseksi koordinaattijärjestelmäksi (Annoni ja Luzet, 2000). ETRS89-järjestelmä onkin nykyään käytössä useimmissa Euroopan maissa.

EUREF ylläpitää ETRS89-koordinaattijärjestelmää ja sen realisaatioita (ETRS89, 2008). EUREF:n tehtäviin kuuluu myös vuonna 1995 perustetun Euroopan pysyvän GPS-verkon EPN:n (EUREF Permanent Network) kehittäminen läheisessä yhteistyössä IGS:n kanssa. EPN-verkkoon kuuluvien asemien (kuva 14) data tallennetaan datakeskuksiin, joista ne ovat saatavissa RINEX-formaatissa. EPN-verkkoon kuuluvia asemia ylläpitävät eri maiden yliopistot, tutkimus- ja karttalaitokset. Suomesta EPN-verkkoon kuuluu Suomen pysyvän GPS-verkon FinnRef:n asemista Metsähovi, Vaasa, Joensuu ja Sodankylä.



**Kuva 14.** Euroopan pysyvien GPS-asemien verkko EPN (EPN, 2008).

## **EUREF89: ETRS89:n ensimmäinen realisaatio**

ETRS89-koordinaattijärjestelmän realisoimiseksi toteutettiin vuonna 1989 euroopanlaajuinen GPS-mittauskampanja EUREF89. Verkkoon kuului 92 GPS-pistettä sekä useita VLBI- ja satelliittilaserpisteitä. VLBI-pisteiden koordinaatteja pidettiin tasoituksessa kiinteinä, joten koordinaatiston orientointi ja mittakaava on peräisin VLBI-havainnoista. Suomesta kampanjassa oli mukana neljä pistettä: Nisulan, Jänhiälän ja Kaunispään I luokan kolmiopisteet ja Metsähovin/Sjökullan VLBI-piste. (Gurtner *et al.*, 1992)

Jotta Suomeen saatiin lisää EUREF89-koordinaatistossa olevia pisteitä, suoritettiin kesällä 1992 GPS-mittauskampanja, johon osallistuivat Geodeettinen laitos, Maanmittauslaitos ja Merenkulkulaitoksen merenmittaustoimisto. Mittauskampanja käsitti 22 I luokan kolmiopistettä. Verkko kiinnitettiin alkuperäisessä EUREF89-kampanjassa mukana olleisiin pisteisiin (Nisula, Kaunispää, Sjökulla), joiden EUREF89-koordinaatteja pidettiin tasoituksessa kiinteinä. (Ollikainen, 1993), (Ollikainen, 1994). Järjestelmän mukaisia koordinaatteja käytettiin muutaman vuoden ajan, kunnes luotiin uusi EUREF-FIN-koordinaatisto.

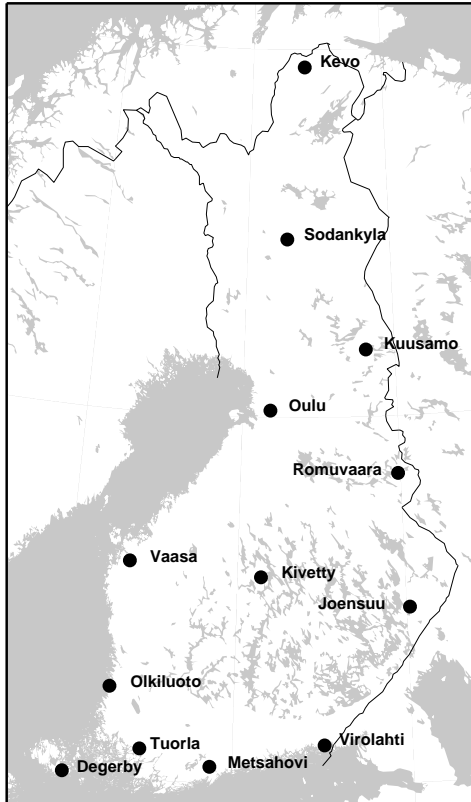
## **3.2 EUREF-FIN – ETRS89-koordinaattijärjestelmän kansallinen realisaatio**

### **3.2.1 Suomen pysyvä GPS-verkko – FinnRef<sup>®</sup>**

Pohjoismaissa ETRS89-koordinaattijärjestelmän kansallisten realisaatioiden suunnittelu sai alkusysäyksen vuonna 1990 kun IAG:n alakomissio EUREF suositteli ETRS89-järjestelmän käyttöönottamista Euroopassa. Vuonna 1993 Pohjoismaisten karttalaitosten johtajien aloitteesta Pohjoismainen Geodeettinen Komissio (NKG) suositteli pysyvien GPS-asemien verkon rakentamista. Jo samana vuonna Geodeettinen laitos aloitti pysyvän GPS-verkon rakentamisen Suomeen uuden koordinaattijärjestelmän rungoksi ja geodynamiikan tutkimuksen työkaluksi.

GPS-asetat pyrittiin rakentamaan sellaisille paikoille, että maankuoren liikkeet pystytään mittaamaan mahdollisimman luotettavasti. GPS-antennit sijoitettiin pääsääntöisesti peruskalliolle pystytettyjen teräsmastojen tai betonipilarien päälle.

Vuoden 1996 loppuun mennessä oli 12 asemaa käsittävä GPS-verkko valmis. Vuonna 2005 verkkoon liitettiin vielä Degerbyn GPS-asema Ahvenanmaalla (Kuvat 15 ja 16). Neljä FinnRef-asemaa (Joensuu, Metsähovi, Sodankylä ja Vaasa) kuuluvat euroopanlaajuiseen pysyvien GPS-asemien verkkoon EPN:ään ja niiden keräämä data lasketaan EPN-laskentakeskuksissa. Suomen neljää EPN-asemaa käytetään ETRS89-järjestelmän ylläpidossa. Metsähovin pysyvä GPS-asema kuuluu myös maailmanlaajuiseen IGS-verkkoon. (Ollikainen *et al.*, 1997; Koivula, 2006)



**Kuva 15.** Suomen pysyvien GPS-asemien verkko FinnRef<sup>®</sup>.

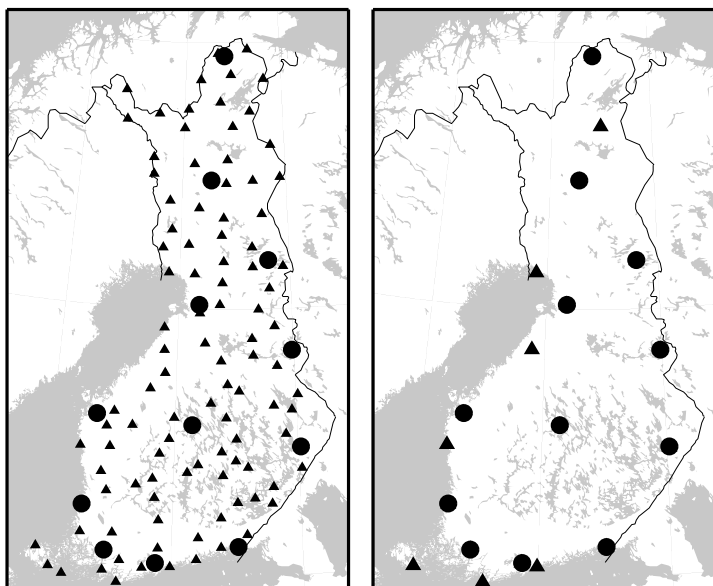


**Kuva 16.** Kuusamon FinnRef-asema.

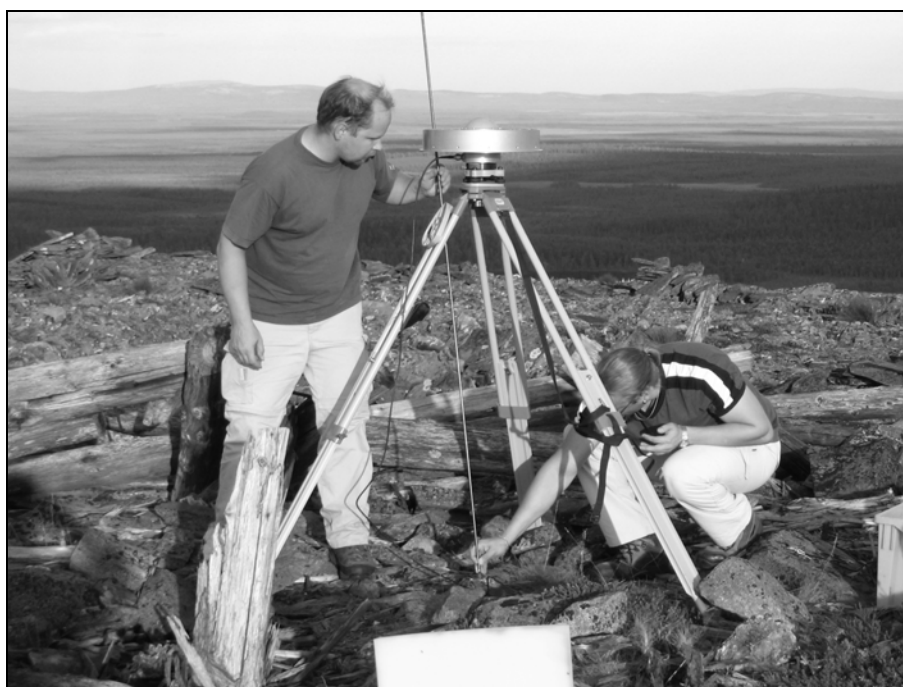
### 3.2.2 EUREF-FIN-mittauskampanja 1996–1997

Vuosina 1996–1997 Geodeettinen laitos suoritti sata pistettä käsittävän GPS-mittauskampanjan ETRS89-järjestelmän kansallisen realisaation luomiseksi (Kuva 17a). Pysyvä GPS-verkko FinnRef oli osana kampanjaa. Kampanjan tavoitteena oli myös määrittää vanhojen geodeettisten järjestelmien (ED50, ED87) ja ETRS89-järjestelmän välinen muunnos. Tämän johdosta suurin osa mitatuista pisteistä oli I luokan kolmiopisteitä. Mukana oli myös kolme tarkkavaaituspistettä ja kuusi mareografien läheisyydessä olevaa pistettä. Mittauskampanja suoritettiin neljässä osassa, joista kaksi ensimmäistä mitattiin vuonna 1996 ja kaksi jälkimmäistä 1997. Havaintoaika oli kullakin pisteellä vähintään 48 tuntia. (Ollikainen *et al.*, 1999)

Mittaukset laskettiin Bernese 4.0-ohjelmalla käyttäen IGS:n tarkkoja ratatietoja. FinnRef-verkon laskennassa käytettiin 23 viikkoa GPS-dataa vuosilta 1996 ja 1997 kattaen mittauskampanjan ajan. FinnRef-verkon GPS-asemien koordinaattien laskenta toteutettiin kahdessa vaiheessa. Ensimmäisessä vaiheessa laskettiin vapaan verkon ratkaisut päivittäin pitämällä Metsähovin ITRF94-koordinaatteja havaintoepookissa kiinteinä. ITRF94-koordinaatistoa käytettiin, koska satelliittien tarkat ratatiedot saatiin kyseisessä koordinaatistossa. Laskennan tuloksena saadut normaalityöt tallennettiin.



**Kuva 17.** (a) Vuosina 1996–1997 mittauksissa mitattu sadan pisteen GPS-verkko, joka määrittää EUREF-FIN-koordinaatiston, (b) samasta EUREF-FIN-tasoituksesta valittu 19 pisteen alijoukko, jonka EUREF-komissio hyväksyi vuonna 1999 Suomen viralliseksi ETRS89-realisaatioksi.



**Kuva 18.** Hannu Koivula ja Pasi Häkli mittaavat GPS-antennin korkeutta Oratunturin kolmiopisteellä G264 vuonna 2006.

Toisessa vaiheessa Metsähovin, Joensuun, Vaasan ja Sodankylän ITRF96-koordinaatit epookissa 1997.0 otettiin lähtökoordinaateiksi tasoitukseen. Asemien ITRF96-koordinaatit saatiin EPN-verkon kautta (ks. kpl 3.1.3). Tasoituksessa normaaliyhtälöt yhdistettiin pitämällä ITRF96-koordinaatit kiinteinä ja näin kaikille 12 FinnRef-asemalle saatiin ITRF96-koordinaatit epookissa 1997.0.

Myös GPS-mittauskampanja laskettiin kahdessa vaiheessa sillä vuosien 1996 ja 1997 havainnot prosessoitiin erikseen. Lopullinen tasointu tehtiin yhdistämällä ensin päivittäisratkaisujen normaaliyhtälöt molemmille vuosille erikseen ja lopulta nämä yhdistettiin. Kampanjan pisteille saatiin lopulliset ITRF96-koordinaatit kiinnittämällä FinnRef-asemien ITRF96-koordinaatit

epookissa 1997.0. Lopullisen tasoituksen koordinaattien neliöllinen keskivirhe (rms) on pohjois- ja itäkomponenteille  $\pm 2$  mm ja korkeudelle  $\pm 6$  mm. (Ollikainen *et al.*, 1999, 2000)

### 3.2.3 ITRF96-koordinaattien muuntaminen ETRS89-järjestelmään EUREF-FIN-koordinaateiksi

Kaikilla kampanjassa olleilla pisteillä ja FinnRef-aseilla oli laskennan tuloksena ITRF96-koordinaatit epookissa 1997.0. Tämän jälkeen ITRF96-koordinaatit muunnettiin ETRS89-järjestelmän mukaisiksi ETRF-koordinaateiksi EUREF-alakomission suositusten mukaisesti (Boucher ja Altamimi, 1995) kaavalla 3.1 käyttäen taulukon 1 parametreja.

$$X_E(t_c) = X_{YY}(t_c) + T_{YY} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{R}_{3_{YY}} & \dot{R}_{2_{YY}} \\ \dot{R}_{3_{YY}} & 0 & -\dot{R}_{1_{YY}} \\ -\dot{R}_{2_{YY}} & \dot{R}_{1_{YY}} & 0 \end{pmatrix} \cdot X_{YY}(t_c) \cdot (t_c - 1989.0) \quad (3.1)$$

Kaavassa  $X_{YY}(t_c)$  ovat pisteen ITRFyy-koordinaatit epookissa  $t_c$  eli tässä tapauksessa pisteiden ITRF96-koordinaatit epookissa 1997.0.  $X_E(t_c)$  sisältää vastaavasti ETRFyy-koordinaatit epookissa  $t_c$  eli tässä tapauksessa ETRF96-koordinaatit epookissa 1997.0.  $T_{YY}$  on pisteen paikkaan tehtävä siirtokorjaus ja  $R_{YY}$ :t ovat kiertomatriisin komponentit.

Kyseinen muunnos muuntaa koordinaatit ITRS-järjestelmästä ETRS89-järjestelmään, muttei vaikuta havaintohetken epookkiin. ETRF-koordinaatit on sidottu Euraasian mannerlaattaan, joka liikkuu ja kiertyy maailmanlaajuisessa ITRF-koordinaatistossa. Muunnos ottaa nämä liikkeet huomioon kaavan 3.1 mukaisesti. Tämä johtaa siihen, että EUREF-FIN:n epookki on mannerlaattojen liikkeiden osalta 1989.0 (ulkoinen epookki). Suomessa havaintohetken epookilla on merkitystä erityisesti jääkauden jälkeisen maankohoamisen johdosta. Kaava 3.1 ei ota laatan sisäisiä liikkeitä huomioon ja siksi mm. maannousun osalta havainnot ovat havaintohetken epookissa 1997.0 (sisäinen epookki). Näin saadulla koordinaatistolla on siis kaksi epookkia. Erotukseksi muihin ETRS89-realisaatioihin Suomen realisaatiolle annettiin nimeksi EUREF-FIN.

Suomen ETRS89-järjestelmän realisaatio esiteltiin EUREF-komissiolle. Koska 100 pistettä käsittävä joukko oli Euroopan laajuisesti liian tiheä, siitä valittiin 19 pisteen alijoukko, jonka EUREF-komissio hyväksyi Suomen ETRS89-realisaatioksi Prahassa 1999 (Kuva 17b). (Ollikainen *et al.*, 1999). EUREF-FIN-koordinaatiston määrittävät kaikki 100 pistettä ja 12 Finnref-asemaa (JHS 153).

**Taulukko 1.** Muunnosparametrit ITRF96-koordinaatistosta EUREF-FIN:iin (Boucher ja Altamimi, 1998; Ollikainen *et al.*, 2000).

Parametri	Arvo	Yksikkö	Parametri	Arvo	Yksikkö
$Tx_{96}$	4.1	cm	$\dot{R}_{1_{96}}$	0.20	0.001"/y
$Ty_{96}$	4.1	cm	$\dot{R}_{2_{96}}$	0.50	0.001"/y
$Tz_{96}$	-4.9	cm	$\dot{R}_{3_{96}}$	-0.65	0.001"/y

### 3.3 EUREF-FIN-koordinaatiston käyttöönotto

Vuonna 1998 Geodeettisen laitoksen ylijohtajan asettama työryhmä selvitti uuden koordinaatiston ja korkeusjärjestelmän tarvetta, siirtymisestä aiheutuvia hyötyjä ja haittoja sekä mahdollisten uusien järjestelmien toteuttamistapaa ja ajankohtaa. Työryhmä totesi raportissaan, että uuteen koordinaatistoon siirtyminen on perusteltua eritoten GPS-tekniikan yleistymisen myötä. Työryhmän mielestä koordinaatiston tulisi olla EUREF-järjestelmään sidottu koordinaatisto ja karttaprojektiksi suositeltiin UTM-projektiota tietyin varauksin. Työryhmä totesi, että siirtymisestä aiheutuu eri organisaatioille huomattavia kustannuksia, mutta kustannusten arvioitiin tulevan sitä suuremmiksi mitä myöhäisempi on siirtymisen aloitusajankohta. (Geodeettinen laitos, 1999 ja Kääriäinen, 2001). Käytännön toteutus hoidettiin Maanmittauslaitoksen ja Geodeettisen laitoksen työryhmässä, jossa laadittiin mm. kaksi julkisen hallinnon suositusta.

Merenkulkulaitos on julkaissut merikarttoja EUREF-FIN-koordinaatistossa jo vuodesta 2003. Vuonna 2006 Maanmittauslaitos siirtyi peruskarttojen tuotannossa EUREF-FIN-koordinaatiston käyttöön. Myös useat kunnat ovat mitanneet liitoksen EUREF-FIN-koordinaatistoon.

#### 3.3.1 Julkisen hallinnon suositukset

JUHTA (Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta) käsittelee valtionhallinnon ja kunnallishallinnon tietohallintoyhteistyön suunnittelua ja yhteistyöhön liittyviä periaatteellisesti tärkeitä tai laajakantoisia kysymyksiä, sekä hyväksyy ja ylläpitää tietokantaa julkisen hallinnon suosituksista.

Vuonna 2002 valmistui Julkisen hallinnon suositus JHS153: *ETRS89-järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa*. JHS153:ssa määritellään EUREF-FIN-koordinaatisto, annetaan kaavat maantieteellisten ja suorakulmaisten koordinaattien välille ja kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrit  $kkj:n$  ja EUREF-FIN:n välille.

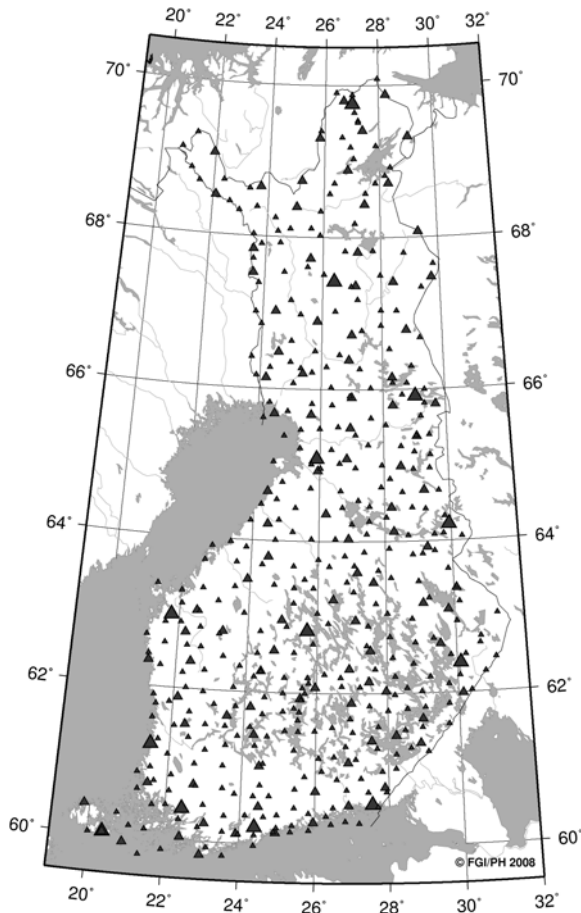
JHS154: *ETRS89-järjestelmään liittyvät karttaprojektiot, tasokoordinaatistot ja karttalehtijako* määrittelee EUREF-FIN-koordinaatistoon liittyvät karttaprojektiot, tasomuunnoksen  $kkj$ :ään, karttalehtijaon, projektiokaavat ja -parametrit. JHS154:ssä annetaan myös esimerkkejä kaavojen käyttämisestä.

Julkishallinnon suosituksia päivitetään aika ajoin, joten viimeisimmät määrittelyt kannattaa tarkistaa niistä. Tässä tiedotteessa esitetyt tiedot vastaavat JHS153:n ja JHS154:n vuoden 2008 versioita.

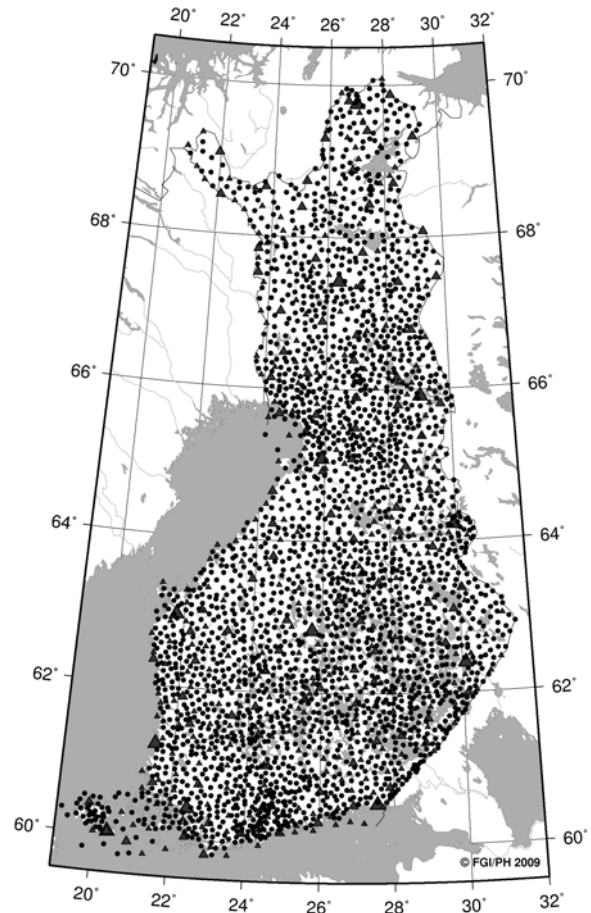
#### 3.3.2 EUREF-FIN-pistetihennykset

EUREF-FIN-koordinaatiston I luokan (E1) muodostavat pisteet, jotka määrittävät koordinaatiston (luku 3.2). Tähän luokkaan kuuluvat 12 FinnRef GPS-asemaa ja Geodeettisen laitoksen vuosina 1996–97 suorittamien GPS-mittausten pisteet (Kuva 17a). Näitä pisteitä on kuitenkin harvassa ja ne ovat usein vaikeasti saavutettavissa. Tämän johdosta Geodeettinen laitos mittasi vuosina 1998–1999 uusia pisteitä helpommin saavutettavissa oleviin paikkoihin (Ollikainen *et al.*, 2001). Tämä 350 pisteen laajennus sidottiin suoraan I luokkaan ja se muodostaa Ib luokan (E1b) (Kuva 19). Maanmittauslaitos on edelleen sitonut omat II luokan EUREF-FIN-mittauksensa suoraan I ja Ib luokkiin. II luokan (E2) pisteiden pisteväli on noin 15 km ja pisteitä on n. 2500 (Kuva 20). Lisäksi Maanmittauslaitos on mitannut paikoin III luokan (E3) pisteitä (Kuva 21). Näillä

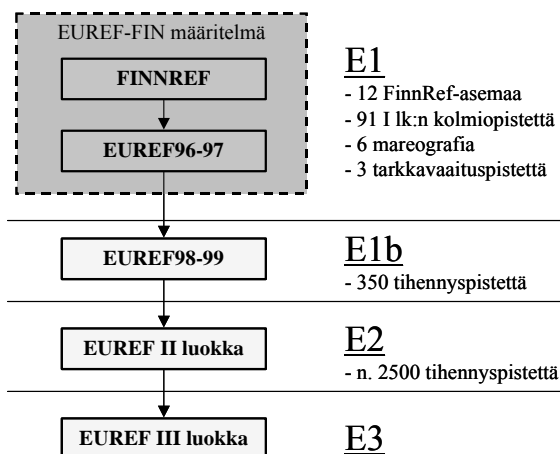
alueilla pistetiheys on noin 5–10 km. Kirjainta E luokan yhteydessä käytetään erottamaan koordinaatit kkej:n luokittelusta (johon EUREF-FIN-pisteillä ei välttämättä ole mitään yhteyttä).



**Kuva 19.** EUREF-FIN E1-E1b-luokat. Isoimmat kolmiot ovat FinnRef-asemia, keskikokoiset v. 1996-97 mittaus ja pienimmät kolmiot ovat vuosien 1998-99 tihennys (E1b-luokka).



**Kuva 20.** EUREF-FIN E1-E2-luokat. E2-luokka on kuvattu mustilla ympyröillä.



**Kuva 21.** EUREF-FIN:n luokkajako. EUREF-FIN:n määrittävät FinnRef ja vuosina 1996–97 mitattu 100 pisteen verkko ja ne muodostavat I luokan (E1). Vuosina 1998–99 mitattu 350 pisteen verkko muodostaa Ib luokan (E1b) ja Maanmittauslaitoksen tihennykset II ja III luokat (E2 ja E3).



### 3.3.3 EUREF-FIN:n kanssa käytettävät karttaprojektiot

JHS 154:ssa suositellaan valtakunnallisissa kartastotöissä käytettäväksi EUREF-FIN-koordinaatistoa ja sen kanssa UTM-karttaprojektiota kaistassa 35. Tätä varten luotiin koko maan kattava ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatisto. ETRS viittaa datumiin, TM projektion tyyppiin, 35 on UTM-kaistan numero ja FIN kertoo, että projektiio poikkeaa standardista 6° kaistanleveydestä. ETRS-TM35FIN:ssä projektion kaistanleveys on 13°, mistä aiheutuu manner-Suomessa -400...+700 ppm:n ja Ahvenanmaalla jopa 1700 ppm:n mittakaavavirheet. JHS 154 suosituksessa on annettu tarkempaa tietoa mittakaavavirheistä ja niiden vaikutuksista eri puolella Suomea. Mittakaavavirheiden lisäksi on otettava huomioon napaluvunkorjaus eli meridiaanikonvergenssi. Napaluvunkorjaus tarkoittaa sitä, että karttapohjoinen ja napapohjoinen eivät ole yhdensuuntaisia. Kaistan reunoilla karttapohjoinen poikkeaa jo huomattavasti napapohjoisesta.

Lähinnä kaavoitukseen ja rakentamiseen liittyvissä tehtävissä ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatiston vääristymät saattavat tulla liian suuriksi projektiokaistan reunoilla. Siksi on määritelty myös asteen välein ETRS-GKn-tasokoordinaatistot. Tunnuksessa ETRS viittaa datumiin ja GKn Gauss-Krüger-projektioon kaistassa  $n$  (missä  $n$  on keskimeridiaanin asteluku). (JHS 154)

Tasokoordinaatteja käytettäessä ETRS89-järjestelmässä on projektiio ja tasokoordinaattijärjestelmä ilmoitettava metatietona. Ajantasainen suositus kannattaa tarkistaa JHS 154:sta.

Taulukossa 2 on esitetty Suomessa käytettävien tasokoordinaatistojen ominaisuuksia. Taulukossa on koottu yhteen EUREF-FIN:n kanssa käytettävät tasokoordinaatistot sekä kkj:n ja ykj:n ominaisuudet.

**Taulukko 2.** Suomessa käytettävien tasokoordinaatistojen ominaisuuksia, mm. (JHS154).

	ETRS-TM35FIN	ETRS-GKn	ykj	kkj
Karttaprojektiio	UTM	Gauss-Krüger	Gauss-Krüger	Gauss-Krüger
Datumi	ETRS89	ETRS89	kkj	kkj
Vertausellipsoidi	GRS80	GRS80	Hayford	Hayford
Keskimeridiaani(t)	27°	19°, 20°... 31°	27°	18°, 21°, 24°, 27°, 30°, 33°
Meridiaanikaistoja	1	13	1	6
Kaistanleveys (suhteessa keskimeridiaaniin)	n. 13° (-8°... +5°)	Tarkoituksen mukainen	n. 13° (-8°...+5°)	3° (±1.5°)
Itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla	500 000m	n 500 000m, missä $n$ on keskimeridiaanin asteluku	3 500 000m	n 500 000m, missä $n$ on kaistannumero (0...5)
Mittakaava keskimeridiaanilla	0.9996	1.0	1.0	1.0

#### Maanmittauslaitoksen uudet peruskartat

Maanmittauslaitoksen peruskartat (1:25000) ja maastokartat (1:50000) painetaan koko Suomen alueella EUREF-FIN:iin perustuvassa ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistossa, mutta koordinaattiruudukko karttoihin painetaan UTM-määritelmän mukaiseksi eli Suomi on jaettu kolmeen 6° levyiseen UTM-kaistaan (TM34, keskimeridiaani 21°; TM35, keskimeridiaani 27° ja TM36, keskimeridiaani 33°). Uusissa peruskartoissa tasokoordinaattiruudukko vaihtuu meridiaaneilla 24°E ja 30°E. Peruskarttoihin maantieteellinen EUREF-FIN-ruudukko painetaan sinisellä ja UTM-kaistan mukainen tasokoordinaattiruudukko (1 km x 1 km) punaisella (purppuralla).

ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatisto puolestaan ilmaistaan mustin koordinaattiristein ja 6 km x 6 km välein mustilla ruudukoilla.

Kaistojen TM34 ja TM36 alueella *karttapohjoinen* (ETRS-TM35FIN, karttaprojektio UTM35) ja *kaistapohjoinen* (TM34 ja TM36) ovat erisuuntaisia. Karttapohjoinen tarkoittaa karttaprojektion osoittamaa pohjoissuuntaa ja kaistapohjoinen tarkoittaa punaisen koordinaattiruudun osoittamaa pohjoissuuntaa.

**Taulukko 3.** Koordinaatistojen esitystavat uusissa peruskartoissa.

	<b>Maantieteellinen EUREF-FIN</b>	<b>ETRS-TM35FIN</b>	<b>TM34</b>	<b>TM35</b>	<b>TM36</b>
Väri	sininen	musta	punainen		
Merkitys	EUREF-FIN-koordinaatisto	tasokoordinaatisto	tasokoordinaattiruudukko		
Esitystapa	2' ruudukko	ristit 1 km:n välein, 6 km x 6 km ruudukko	1 km x 1 km ruudukko		
Alue	koko maa	koko maa	18°-24° E	24°-30° E	30°-36° E

## 4 Korkeudet

### 4.1 Suomalaiset korkeusjärjestelmät

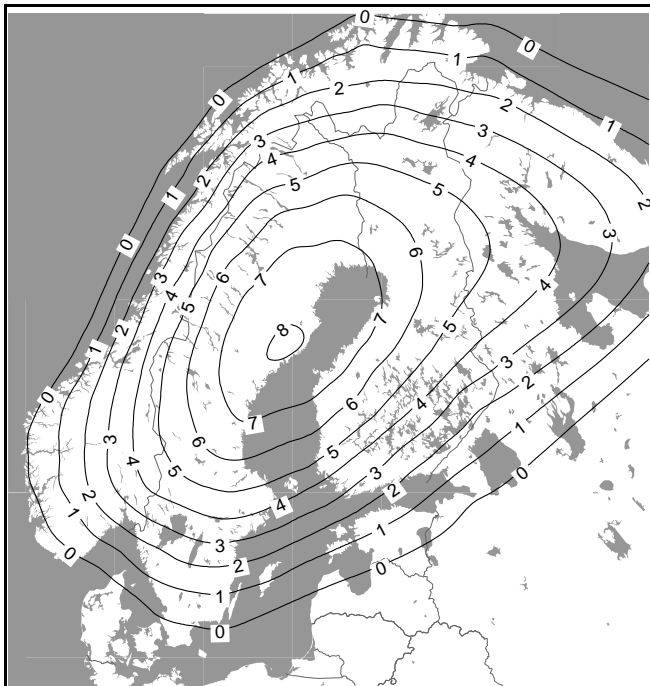
Jääkausien aikana Fennoskandiassa maankuori painui jäämassojen painosta useita satoja metrejä. Jääkauden jälkeen maankuori palautuu vähitellen alkuperäiseen muotoonsa. Tämä maannousuilmio on nähtävissä selkeimmin Merenkurkussa, jossa maa kohoaa lähes senttimetrin vuodessa (Kuva 22).

Maankohoamisen vuoksi korkeusjärjestelmä on aika-ajoin ajantasaistettava. Perinteisesti korkeuksia on mitattu tarkkavaaituksella, joka kestää vuosikymmeniä. Suomeen on reilun sadan vuoden aikana mitattu kolme tarkkavaaitusta, joiden tuloksista on muodostettu mm. NN-, N43-, N60- ja N2000-korkeusjärjestelmät. Vaaitsemalla luotujen korkeusjärjestelmien korkeudet ovat normaali- tai ortometrisiä korkeuksia (ks. määritelmät liitteessä A).

#### 4.1.1 NN-korkeusjärjestelmä

Tie- ja vesirakennusten ylläilytys suoritettiin vuosina 1892–1910 ensimmäisen tarkkavaaituksen, joka kattoi lähinnä eteläisen Suomen. Vaaituslinjojen yhteispituus oli yli 5000 kilometriä ja pääosa linjoista vaaittiin rautateitä pitkin.

Vaaituksen tuloksena muodostettiin NN-korkeusjärjestelmä. Nollakorkeudeksi valittiin Helsingin Katajanokan siltaan kiinnitetyn vesiasteikon nollapiste. Myöhemmin todettiin, että nollakorkeus oli 109 mm Helsingin vuosien 1904–1909 havainnoista lasketun keskivedenpinnan alapuolella. (Kääriäinen, 1963).



**Kuva 22.** Jääkauden jälkeinen maannousu Fennoskandiassa aiheuttaa aika ajoin tarpeen uudistaa korkeusjärjestelmiä. Pohjoismaisen NKG2005LU maannousumallin käyrät kuvaavat millimetreissä vuosittaista maannousua merenpinnan suhteen. (Vestøl, 2006 ja Ågren ja Svensson, 2007).

NN-järjestelmä on edelleen jossain määrin käytössä, mm. vesioikeudessa (vanhoissa voimassa olevissa vesioikeuden päätöksissä). Myös sisävesiväylien ja sisävesien syvyystiedot ovat sidoksissa NN-järjestelmään (Poutanen ja Saarinen, 2004). Lisäksi muutamat kunnat käyttävät NN-järjestelmää.

#### 4.1.2 N43-korkeusjärjestelmä

Maankohoamisen ja pohjoisen Suomen voimistuneen taloudellisen elämän johdosta Geodeettinen laitos aloitti vuonna 1935 toisen tarkkavaaituksen. Jotta toisen tarkkavaaituksen tulokset saatiin nopeasti käyttöön, luotiin alun perin tilapäiseksi järjestelmäksi tarkoitettu N43-järjestelmä. Järjestelmän lähtökorkeus otettiin Pasilassa olevasta pisteestä (N:o 35007), jolle annettiin sille johdettu NN-korkeus. Keskivedenpinta Helsingissä sivuutti maankohoamisen johdosta NN-järjestelmän nollakorkeuden vuonna 1943. N43-korkeudet ilmoittavat siis likimäärin Helsingin keskivedenpinnasta laskettuja korkeuksia vuonna 1943, joka on myös toisen tarkkavaaituksen keskihetki N43-järjestelmään käytettyjen havaintojen osalta.

N43-järjestelmää laajennettiin sitä mukaa, kun mittaukset etenivät. Edellisen silmukan tuloksina saatuja korkeuksia pidettiin tasoituksessa kiinnitettynä. Uudet pisteet pakotettiin jo laskettuihin korkeuksiin. N43-korkeuksia ei siis johdettu koko verkon tasoituksesta eikä maankohoamista tai kallistumista otettu huomioon. (Kääriäinen, 1963). N43-järjestelmä on käytössä vielä joissakin kunnissa.

#### 4.1.3 N60-korkeusjärjestelmä

Toisen tarkkavaaitusverkon pääosa, sisältäen ensimmäisen tarkkavaaituksen linjat, saatiin vaaittua linjalle Aavasaksa-Rovaniemi-Kemijärvi asti vuoteen 1955 mennessä. Linjojen pituus oli yli 6200 kilometriä, joista valtaosa oli vaaittu rautateitä pitkin. Tämän jälkeen suoritettiin vaaitusverkon tasoitus. Tasoituksen tuloksena saatiin korkeuserot vuonna 1960 ja maankohoamisen suuruus kullakin kiintopisteellä. N60-järjestelmän lähtökorkeudeksi valittiin Helsingin teoreettinen keskivedenpinta vuoden 1960 alussa. (Kääriäinen, 1963 ja 1966).

Lapissa suoritettiin tarkkavaaituksia vuosina 1953–1972. Näiden mittauksen perusteella luotiin väliaikainen LN-korkeusjärjestelmä samalla tavalla, kuin N43-järjestelmä. Vuosien 1973–1975 uusintavaaitukset mahdollistivat maankohoamislukujen määrittämisen ja LN-korkeuksien korvaamisen N60-korkeuksilla. N60-järjestelmä on tällä hetkellä yleisesti käytössä oleva korkeusjärjestelmä. (Lehmuskoski et al., 2008).

#### 4.1.4 N2000-korkeusjärjestelmä

N2000-korkeusjärjestelmä perustuu kolmanteen tarkkavaaitukseen, joka sisältää lähes 9200 km vaaituslinjoja. Suomen kolmas tarkkavaaitus aloitettiin vuonna 1978 ja viimeiset mittaukset valmistuivat syksyllä 2006.

Suomen kansallisen tasoituksen lähtöarvo määritettiin pohjoismaisena yhteistyönä Itämeren ympäri tehdyllä tasoituksella, jossa oli vaaitushavaintoja Suomesta, Ruotsista, Norjasta, Tanskasta, Hollannista, Pohjois-Saksasta, Puolasta, Liettuasta, Latviasta ja Virossa. Tästä tasoituksesta käytetään lyhennettä BLR (Baltic Levelling Ring) ja sen lähtötaso on NAP (Normaal Amsterdam)

dams Peil), joka on realisoitu BLR-tasoituksessa mukana olleella Hollannissa sijaitsevalla kiintopisteellä N:o 13600. (JHS163)

Korkeusjärjestelmän N2000 lähtötason määrittävä peruspiste on Kirkkonummella Geodeettisen laitoksen Metsähovin observatorion alueella oleva kiintopiste PP2000, jonka korkeusluke- ma on saatu BLR-tasoituksesta. N2000-järjestelmä ei ole aiempien kansallisten korkeusjärjes- telmien tavoin sidottu Helsingin keskimääräiseen merenpintaan vaan se perustuu NAP:n määrit- tämään korkeustasoon. N2000:n korkeudet ovat *normaalikorkeuksia*, kun N60:n korkeudet ovat *ortometrisia korkeuksia*. (JHS163, Lehmuskoski et al., 2008).

## 4.2 Ellipsoidiset korkeudet

Satelliittipaikannuksella saatava korkeus vertausellipsoidista on geometrinen suure: metrinen etäisyys vertausellipsoidin pinnasta laskettuna ellipsoidin normaalia pitkin. Koska ellipsoidinen korkeus ei ole sidoksissa painovoimaan, vesi saattaa virrata näennäisesti ylämäkeen. Esimerkiksi Haminassa ellipsoidisen korkeuden mukainen meren pinta on noin 3 metriä alempana kuin Hel- singissä, vaikka ortometrisen korkeuden mukaiset korkeudet ovat samat.

Korkeus vertausellipsoidista on useimmissa tapauksissa hyödytön suure, koska mitään kor- keusjärjestelmää ei ole sidottu vertausellipsoidiin. Korkeus vertausellipsoidista on muunnettava normaali- tai ortometriseksi korkeudeksi geoidimallin avulla.

EUREF-FIN-korkeudet ovat ellipsoidisia korkeuksia laskettuna GRS80-ellipsoidilta. Lisäksi EUREF-FIN-korkeuksien epookki on 1997.0 eli ne kuvastavat tilannetta koordinaatiston perus- tamisen aikaan. Maankuori on tämän jälkeen deformatunut mm. maannousun vaikutuksesta.

## 4.3 Geoidi ja geoidimallit

Klassisen määritelmän mukaan geoidi on Maan painovoimakentän tasa-arvopinta, joka yhtyy likimäärin valtameren keskivedenpintaan. Tämä ei pidä täysin paikkaansa, koska erilaiset geo- fysikaaliset ilmiöt, kuten merivirrat, merien lämpölaajeneminen, suolaisuuden muutokset jne. aiheuttavat valtameren keskivedenpinnan korkeuteen poikkeamia geoidiin nähden. Ilmiötä kut- sutaan merenpinnan topografiaksi (Poutanen, 2000).

Perinteisesti geoidia on pidetty korkeusjärjestelmien lähtötasona. Geoidimallin avulla fysi- kaalisten ja geometrinen korkeuksien välinen yhteys voidaan esittää:

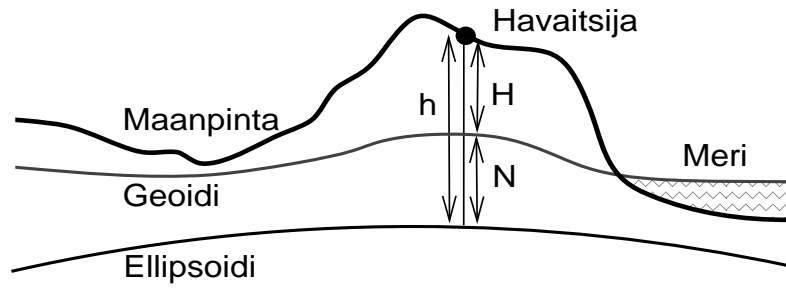
$$N = h - H, \quad (4.1)$$

missä  $N$  on korkeus geoidista,  $h$  on korkeus ellipsoidista ja  $H$  on ortometrinen tai normaalikorke- us (Kuva 23).

Suomeen on laskettu useita geoidimalleja ja muunnospintoja. Ne poikkeavat toisistaan mää- ritysmenetelmän, käytetyn datumin ja valitun lähtötason johdosta toisistaan jopa kymmeniä met- rejä. Geoidimalleja on määritetty käyttäen mm. tähtitieteellisiä, painovoima-, satelliittipaikan- nus- ja painovoimasatelliittihavaintoja.

N2000-korkeuksien yhteydessä on käytettävä FIN2005N00-geoidimallia, joka on sovitettu N2000-korkeuksien mukaisesti. FIN2005N00-mallia käyttäen ellipsoidiset EUREF-FIN- korkeudet voidaan muuntaa suoraan N2000-korkeuksiksi. FIN2005N00-mallin tarkkuus on  $\pm 19$  mm (keskihajonta) vaihteluvälin ollessa  $-47$  mm ...  $+60$  mm. (Bilker-Koivula ja Ollikainen,

2008). N60-korkeuksien kanssa on käytettävä FIN2000-geoidimallia. FIN2000-mallin tarkkuus on  $\pm 28$  mm (rms) ja suurimmat muunnosvirheet ovat noin 8-9 cm. (Ollikainen, 2002).



**Kuva 23.** Erilaisia korkeuksia. GPS:llä saatavat korkeudet  $h$  ovat korkeuksia vertausellipsoidin pinnasta, kun taas perinteiset fysikaaliset korkeudet  $H$  ovat korkeuksia merenpinnan tasoon yhtyvistä ekvipotentiaalipinnasta eli geoidista. Geoidin korkeuksien  $N$  avulla korkeus ellipsoidista voidaan muuttaa ortometriseksi tai normaalikorkeudeksi.

## OSA 2 MUUNNOKSET

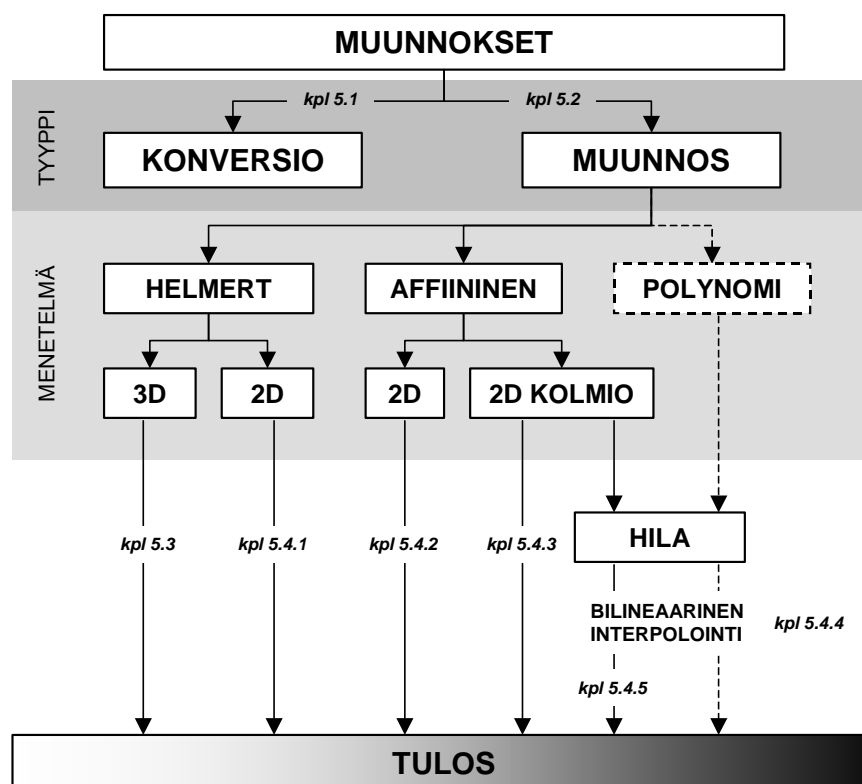
### 5 Muunnokset ja konversiot

Koordinaatteja voidaan muuntaa koordinaatistosta tai esitystavasta toiseen. Muunnokseen liittyvä terminologia on kirjavaa. Tässä muunnokset erotellaan kahteen päätyyppiin ja käytetään seuraavaa terminologiaa:

- 1) *koordinaattikonversio*
- 2) *koordinaattimuunnos*

Koordinaattikonversiolla muunnetaan koordinaatteja kahden samaan datumiin perustuvan koordinaatiston välillä. Useimmiten konversio muuttaa vain koordinaattien esitystapaa. Koordinaattien esitystavalla tarkoitetaan sitä missä muodossa koordinaatit annetaan, esimerkiksi maantieteelliset tai suorakulmaiset koordinaatit. Koordinaattikonversiota käytetään esimerkiksi silloin, kun maantieteelliset EUREF-FIN-koordinaatit projisoidaan ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistoon.

Koordinaattimuunnos on menetelmä, jolla muunnetaan koordinaatteja kahden eri datumiin perustuvan koordinaatiston välillä. Koordinaattimuunnos suoritetaan muunnosparametreilla, jotka on laskettu molemmassa koordinaatistossa mitattujen yhteisten pisteiden avulla. Tällaista koordinaattimuunnosta käytetään esimerkiksi kun muunnetaan koordinaatteja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistosta kkj-tasokoordinaatistoon. Koordinaattimuunnoksissa muunnosmenetelmänä on usein yhdenmuotoisuus- (Helmert-) tai affiininen muunnos.



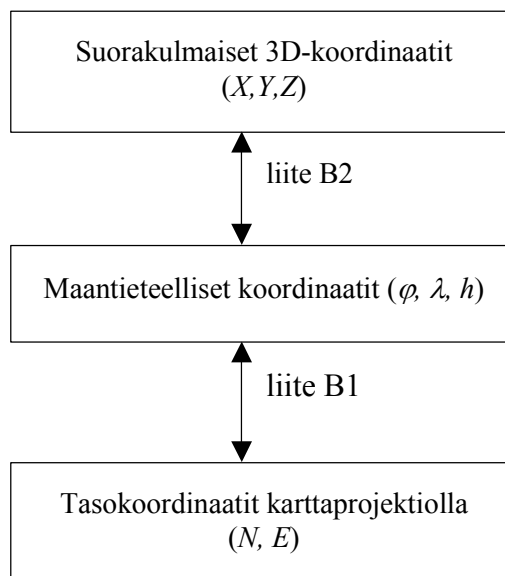
**Kuva 24.** Muunnokset ja konversiot. Kuvassa on tässä luvussa läpi käytävät muunnokset ja konversiot. Polynomi-muunnoksia ei kuitenkaan käsitellä tässä yhteydessä.

## 5.1 Koordinaattikonversiot

Halutun muunnoksen suorittamiseen voivat vaikuttaa monet asiat, kuten karttaprojektio, korkeusjärjestelmä ja geoidimalli. Usein muunnoksen suorittamiseksi tulee ensin suorittaa joukko koordinaattikonversioita, jotta varsinainen koordinaattimuunnos voidaan laskea.

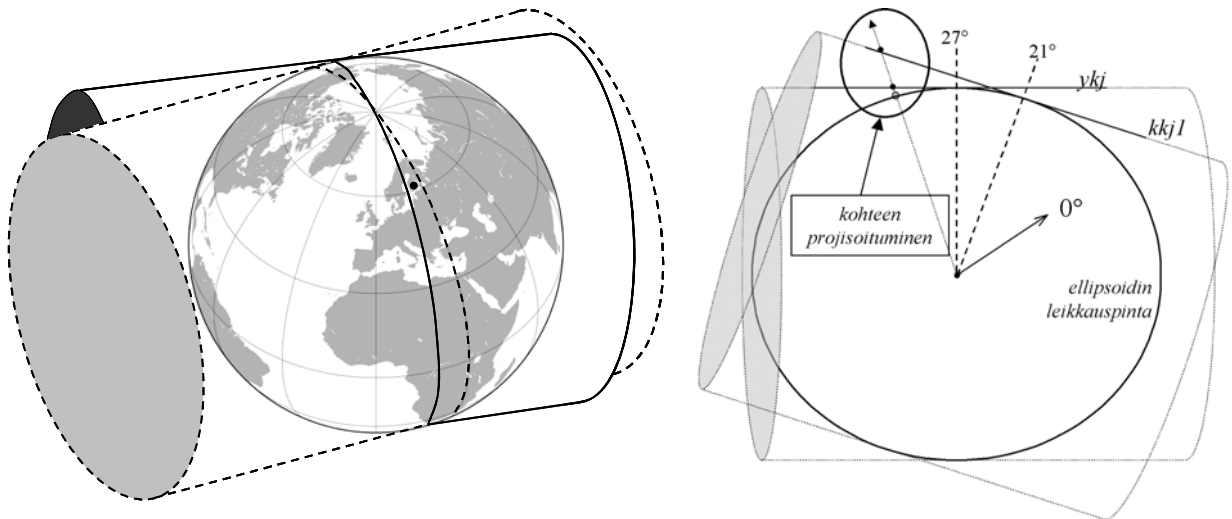
*Koordinaattikonversio* on matemaattinen muunnos, jolla koordinaatit voidaan muuntaa koordinaatistosta toiseen datumin (esim. kkj, EUREF-FIN, N60, N2000,...) säilyessä samana. Tuloksena saadaan siis saman datumin (koordinaatiston) mukaisia koordinaatteja kuin alkuperäisetkin koordinaatit. Usein voidaan ajatella muutettavan vain koordinaattien esitystapaa ilman että koordinaattien tarkkuus juurikaan kärsii. Koordinaattikonversio suoritetaan yleisesti tunnettujen kaavojen (esim. Suomessa Hirvosen projektiokaavat) avulla. Esimerkiksi muunnettaessa suorakulmaiset kolmiulotteiset koordinaatit maantieteellisiksi tai maantieteelliset koordinaatit tasokoordinaateiksi käytetään koordinaattikonversiota (Kaavio 1).

Koordinaattikonversioihin luetaan myös karttaprojektioilta tai tasokoordinaatistolta toiseen karttaprojektioon tai tasokoordinaatistoon siirtyminen, kuten kaistanvaihto (Kaavio 2 ja Kuva 25). Periaatteessa siirtyminen tehdään aina maantieteellisten koordinaattien kautta eli tasokoordinaatit konvertoidaan maantieteellisiksi vertausellipsoidille, jonka jälkeen ne konvertoidaan haluttuun karttaprojektioon tai tasokoordinaatistoon. Poikkeuksena ovat samalle keskimeridiaanille asetetut poikittaiset lieriöprojektiot. Esimerkiksi muunnos Gauss-Krüger-projektiosta UTM-projektioon voidaan tehdä tässä erikoistapauksessa suorilla kaavoilla. Liitteessä B on annettu kaavat ETRS-GK27 ja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistojen välille suoraan konversioon. Kyseinen konversio voidaan suorittaa myös maantieteellisten koordinaattien kautta. Eri konversio-menelmiä (mm. erilaiset projektiokaavat) ja niiden käyttöä ja vertailua ei käydä tässä tarkemmin läpi, mutta esimerkit Suomessa käytettävistä konversiokaavoista annetaan liitteessä B ja laske-  
kentaesimerkit liitteessä D.

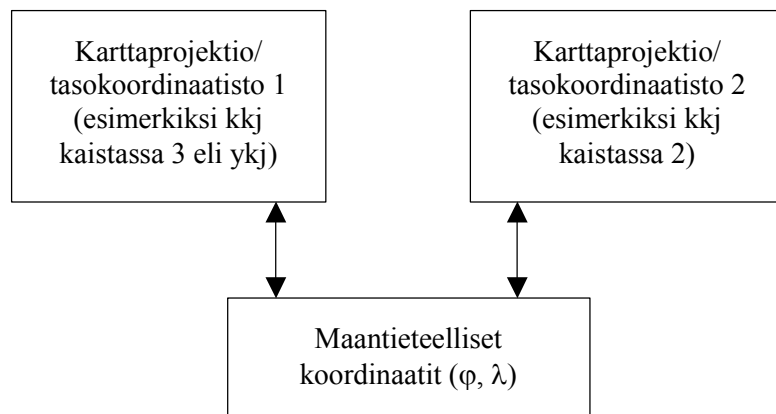


**Kaavio 1.** Koordinaattikonversio datumin säilyessä samana.





**Kuva 25.** Kahteen eri keskimeridiaaniin perustuvien poikittaisten lieriöprojektioiden kuvautuminen. Vasemmassa kuvassa on esitetty eri keskimeridiaaneilla olevien poikittaisten lieriöprojektioiden orientaatio Maan suhteen. Oikeanpuoleisessa kuvassa on esitetty ellipsoidin pinnalla olevan kohteen projisoituminen eri keskimeridiaanilla oleville lieriöprojektiolle (ellipsoidista otettu leikkaus leveyspiiriä pitkin ja katselukulma ellipsoidin pitkuakselia pitkin).



**Kaavio 2.** Karttaprojektion/tasokoordinaatiston vaihtaminen (kaistanvaihto). Jos halutaan vaihtaa tasokoordinaatiston kaistaa (keskimeridiaania), on muunnos tehtävä maantieteellisten koordinaattien eli ellipsoidin kautta.

## 5.2 Koordinaattimuunnokset ja muunnosparametrien määrittäminen

*Koordinaattimuunnoksella* muunnetaan koordinaatteja geodeettisesta koordinaatistosta/datumista toiseen, jolloin voidaan myös siirtyä vertausellipsoidilta toiselle. Koordinaattimuunnos tehdään muunnosparametreilla, jotka on laskettu molemmissa koordinaatistoissa mitattujen yhteisten pisteiden avulla. Koordinaattimuunnos suoritetaan kahden eri datumiin perustuvan koordinaatiston samantyyppisten koordinaattien välillä (toisin kuin konversio). Muunnosta ei voi suorittaa suoraan esim. kolmiulotteisten ja kaksiulotteisten koordinaattien välillä vaan koordinaatit on ensin muutettava samaan esitysmuotoon. Projisoitujen tasokoordinaattien yhteydessä on varmistettava, että projektio-tyyppi ja keskimeridiaani ovat samoja ennen kuin lasketaan muunnos. Jos tasokoordinaatistojen keskimeridiaanit poikkeavat toisistaan, voi keskimeridiaanien välisestä erosta ja muunnosalueen koosta riippuen muunnokseen aiheutua huomattavat jäännösvirheet.

Koordinaattimuunnoksesta aiheutuu lopputulokseen aina muunnosvirhettä. Koordinaatit ovat tavalla tai toisella deformoituneita mittausvirheiden vuoksi, joten muunnokseen sisältyy aina epävarmuutta ja epätarkkuutta. Esimerkiksi muunnos kkj-koordinaatistosta EUREF-FIN-koordinaatistoon on koordinaattimuunnos, eikä sitä voida tehdä täysin virheettömästi. Tämän vuoksi koordinaattien määrittäminen tulisi aina tallentaa metatietona; mitattu vai muunnettu. Jos mitatut koordinaatit halutaan muuntaa toiseen koordinaatistoon, tulee myös alkuperäiset koordinaatit tallentaa, vaikka niitä ei käytäisikään.

Muunnosmenetelmiä on useita ja menetelmän valintaan vaikuttavat mm. haluttu muunnostarkkuus ja muunnoksen käyttötarkoitus. Muunnosparametrit koordinaatistojen välille lasketaan yhteisten, molemmissa koordinaatistoissa tunnettujen ja mitattujen vastin pisteiden avulla. Vastin pisteitä tulisi olla mahdollisimman paljon, jotta muunnosta voidaan pitää luotettavana ja mahdollisesti poikkeavat pisteet tulee hylätä muunnosparametreja laskettaessa. Erityistä huomiota on kiinnitettävä muunnoksen vastin pisteiden valintaan; mm. koordinaattien määrittäminen, luokka ja pisteen perustamistapa ovat tärkeitä tekijöitä.

Muunnosparametrit määritetään yleisesti pienimmän neliösumman keinolla. Liitteessä C on annettu kaavat, joilla muunnosparametrit voidaan laskea tässä tiedotteessa esiteltäviin muunnoksiin. Koordinaattimuunnos suoritetaan tasokoordinaatistojen tai suorakulmaisten 3D-koordinaatistojen välillä. Seuraavissa luvuissa muunnosmenetelmistä esitellään yhdenmuotoisuus- eli Helmert-muunnos sekä affiininen muunnos.

### 5.3 Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos

Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos eli 7-parametrinen Helmert-muunnos voidaan suorittaa kahden kolmiulotteisen suorakulmaisen koordinaatiston välillä. Muunnoksen parametreina ovat koordinaatiston kierto kolmen akselin suhteen, origon siirto ja mittakaavan muutos:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (1+m)R_3R_2R_1 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

missä  $[\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]^T$  on origon siirto,  $1+m$  on koordinaatistojen välinen mittakaavakerroin ja  $R_1$ ,  $R_2$  ja  $R_3$  ovat kiertomatriiseja X-, Y- ja Z-akselien suhteen. Muunnos ja kaavan johtaminen on esitetty tarkemmin liitteessä C1. Mikäli kiertokulmat ovat pieniä, muunnos voidaan kirjoittaa myös muodossa:

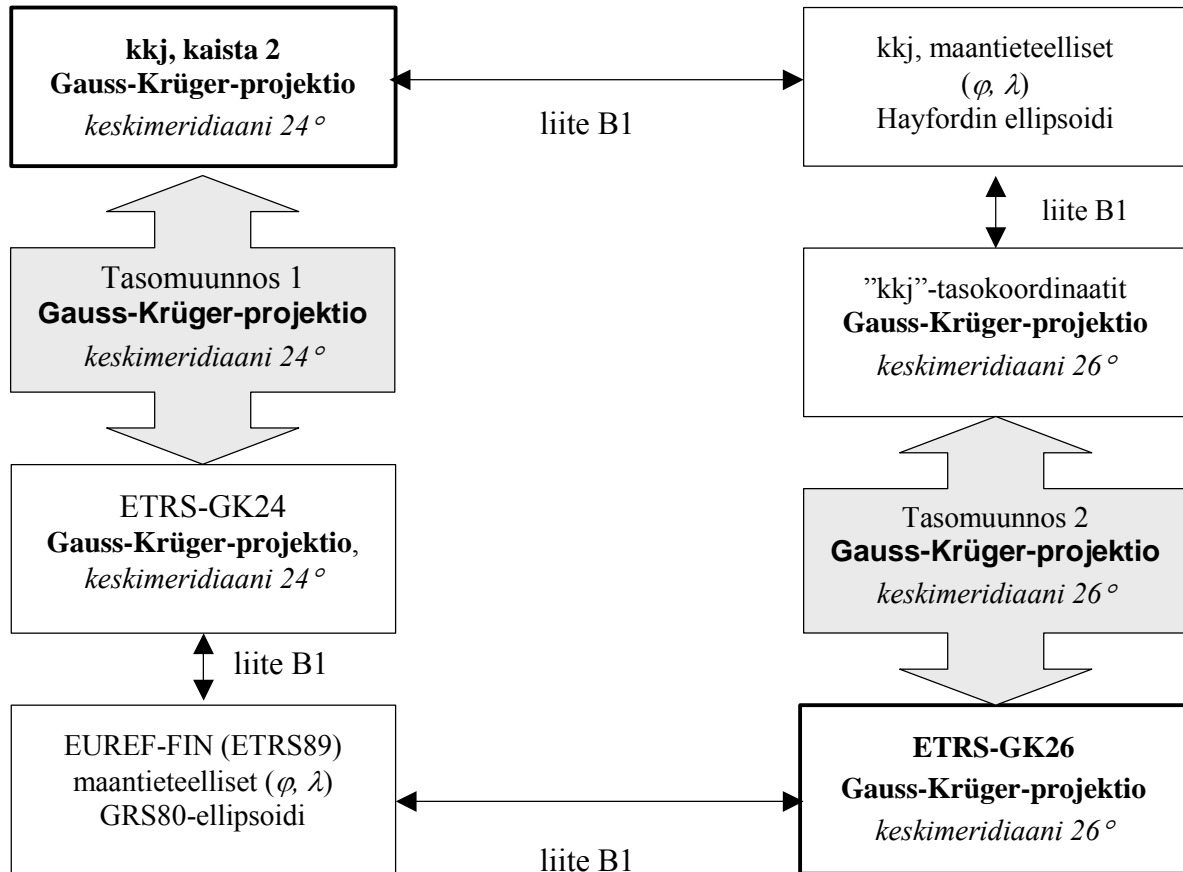
$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (1+m) \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

missä  $e_x$  on kierto X-akselin suhteen,  $e_y$  on kierto Y-akselin suhteen ja  $e_z$  on kierto Z-akselin suhteen. Kiertokulmien  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  yksikkö on kaavoissa radiaaneina. Kyseinen muunnos suoritetaan koordinaatiston origon suhteen ja sitä kutsutaan Burša-Wolf-muunnokseksi.

## 5.4 Tasomuunnokset

Tasomuunnoksia saa suorittaa vain samantyyppisten tasokoordinaatistojen välillä. Suomessa yleisesti käytettävät tasokoordinaatistot ovat poikittaisia lieriöprojektiota. Tällöin tasomuunnos voidaan suorittaa, jos lieriöprojektiolla on sama keskimeridiaani.

Muussa tapauksessa ei muunnosta saa suorittaa, koska siitä voi aiheutua huomattavat jännösvirheet. Tasokoordinaatit pitää ennen varsinaista muunnosta konvertoida samaan tai haluttuun karttaprojektioon (Kaavio 3). Tämän jälkeen voidaan laskea muunnosparametrit tai suorittaa muunnos olemassa olevilla parametreilla.



**Kaavio 3.** Kaksi vaihtoehtoista tapaa käyttää tasomuunnosta kkj-kaistan ja ETRS-GK26:n välillä. Koska tasokoordinaatistoilla on eri keskimeridiaani, on ne ennen muunnosta konvertoitava samalle keskimeridiaanille. Koordinaattikonversiot ovat ohuita nuolia ja varsinaiset koordinaattimuunnokset värjättyjä isoja nuolia. Jos käytetään olemassa olevia muunnosparametreja, määrää parametrien määrittäytapa koordinaatistot, joiden välillä niitä voi käyttää.

### 5.4.1 Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnos tasolla

Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnos tasossa voidaan suorittaa kahden tasokoordinaatiston välillä edellä esitetyin ehdoin. Muunnosparametreina ovat koordinaatiston kierto, origon siirto ja mittakaavaan muutos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = (1+m) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

missä  $[\Delta x \ \Delta y]^T$  on origon siirto akselien suunnassa,  $1+m$  on koordinaatistojen välinen mittakaavakerroin ja  $\alpha$  on koordinaatistojen välinen kiertokulma. Kaava voidaan kirjoittaa myös muotoon:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

eli:

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 - by_1 + c \\ y_2 &= bx_1 + ay_1 + d \end{aligned} \quad (5.5)$$

missä parametrit ovat  $k=(1+m)$ ,  $a=k\cos\alpha$ ,  $b=k\sin\alpha$ ,  $c=\Delta x$ ,  $d=\Delta y$ . Muunnosparametreina ilmoitetaan joko siirto, kiertokulma ja mittakaavaan muutos tai näiden avulla johdetut parametrit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$ . Kiertomatriisi voidaan muodostaa myös toisin, mutta tapausta ei käsitellä tässä, ks. esim. Kallio (1998). Muunnosparametrien määrittäminen on esitetty liitteessä C2.

## 5.4.2 Affiininen muunnos tasolla

Affiininen muunnos poikkeaa yhdenmuotoisuusmuunnoksesta siinä, että kummallekin koordinaattiakselille on oma mittakaavakerroin ja kiertokulma. Näin muunnosparametreja on tasomuunnoksessa yhteensä kuusi. Affiininen muunnos ei säilytä kuvioiden muotoja, mutta muunnos yleensä antaa pienemmät jäännösvirheet, koska se on ”joustavampi” koordinaatistojen deformaatioiden suhteen. Muunnos voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

eli:

$$\begin{aligned} x_2 &= \Delta x + a_1 x_1 + a_2 y_1 \\ y_2 &= \Delta y + b_1 x_1 + b_2 y_1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

missä parametrit  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  ovat origon siirto, ja  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  ja  $b_2$  ovat akseleiden kiertokulmien ja mittakaavatekijöiden funktioita. Affiinisien muunnosten parametrien määrittäminen on esitetty liitteessä C3.

### 5.4.3 Affiinen muunnos kolmioittain

Affiinen muunnos kolmioittain on affiinisen muunnoksen erikoistapaus. Kolmioverkossa paikallistetaan kolmio, jonka sisällä muunnettava piste sijaitsee. Kolmion kärkipisteiden molemmissa koordinaatistoissa tunnettujen vastinpisteiden avulla lasketaan affiinisen muunnoksen parametrit ( $a_1, a_2, b_1, b_2, \Delta x$  ja  $\Delta y$ ) ja kyseisten parametrien avulla muunnetaan piste koordinaatistosta toiseen. Liitteeseen C3.2 on koottu muutama menetelmä, joilla oikea muunnoskolmio voidaan etsiä kolmioverkosta.

Muunnoksen etuna on se, että kolmioiden kärkipisteissä koordinaatit eivät muutu ja se, että muunnetut kohteet (esim. tiet) ovat jatkuvia siirryttäessä kolmiosta toiseen. Käänteisen muunnoksen laskenta onnistuu myös vaivattomasti. Muunnospisteistöä voi tihentää paikallisesti ilman, että tihennys vaikuttaisi muunnokseen sen kolmion ulkopuolella, johon uusia pisteitä on lisätty. Toisaalta kolmioittain tehty affiinen muunnos on tunteeton karkeille virheille, koska muunnokseen ei saada tarkkuusarviota. Muunnoksessa on käytettävissä kuusi tunnettua ja kuusi tuntematonta parametria ja näin muunnokseen ei jää ylimääritystä. Tämän vuoksi kolmioittaisen affiinisen muunnoksen käyttöä on kontrolloitava muutoin (esim. testipistein) ja muunnospisteiden huolelliseen valintaan on kiinnitettävä erityistä huomiota. Muunnoksen tarkkuudesta voidaan sanoa, että se ei voi olla tarkempi kuin parametrien laskentaan käytetyn kolmion epätarkin piste.

### 5.4.4 Bilineaarinen interpolointi hilassa

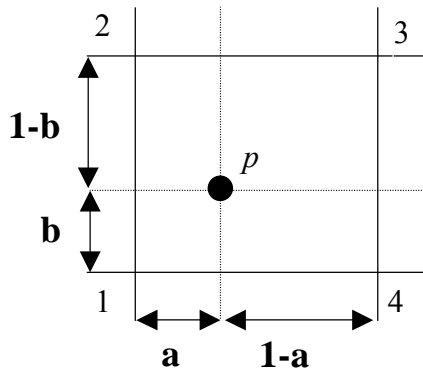
Bilineaarista interpolointia käytetään esimerkiksi geoidimallien yhteydessä ja joissain koordinaattimuunnoksissa. Hilojen muodostamiseksi on voitu käyttää hyvinkin monimutkaisia muunnosmenetelmiä (mm. polynomimuunnoksia tai affiinista muunnosta kolmioittain), joiden käyttäminen suoraan sovelluksissa tai mittalaitteissa olisi hankalaa.

Bilinearisessa interpoloinnissa suorakulmaisen hilan avulla interpoloidaan muunnettavan pisteen koordinaateille tai muille suureille arvot nurkkapisteiden arvojen avulla (Kuva 26). Bilinearisella interpoloinnilla lasketaan pisteelle  $p$  arvo  $z_p$ :

$$z_p = a \cdot b \cdot z_3 + a \cdot (1-b) \cdot z_4 + (1-a) \cdot b \cdot z_2 + (1-a) \cdot (1-b) \cdot z_1, \quad (5.8)$$

missä  $a$  ja  $b$  ovat pisteen normalisoituja etäisyyksiä hilan akseliston suunnissa hilan pisteestä yksi ja  $z_i$ :t ovat hilapisteiden arvoja. Esimerkiksi, jos hilan sivunpituus  $s=1000$  metriä molemmissa suunnissa ja hilapisteen 1 koordinaatit ovat (6694000 N , 435000 E) ja pisteen  $p$  koordinaatit ovat (6694684 N, 435467 E), saadaan  $a$  ja  $b$ :

$$a = \frac{E_p - E_1}{s} = \frac{435467 - 435000}{1000} = 0.467$$
$$b = \frac{N_p - N_1}{s} = \frac{6694684 - 6694000}{1000} = 0.684$$



**Kuva 26.** Bilineaarinen interpolointi tasavälisessä hilassa. Nurkkapisteiden tunnettujen arvojen  $z_i$  avulla interpoloidaan pisteelle  $p$  arvo  $z_p$ .

### 5.4.5 Bilineaarisen interpoloinnin hyödyntäminen kolmioittaisen affiinisen muunnoksen tapauksessa

Affiininen muunnos kolmioittain on melko monimutkainen muunnosmenetelmä käytännön sovelluksiin esim. tavallisesti käytettyyn yhdenmuotoisuusmuunnokseen verrattuna. Muunnoksen käyttäminen voidaan tehdä yksinkertaisemmaksi hyödyntämällä bilineaarista interpolointia. Käytännössä tämä tehdään siten, että muodostetaan riittävän tiheä hila (esimerkiksi 1 km x 1 km) toiseen koordinaatistoon (riippuen kummin päin muunnosta halutaan käyttää). Sopiva hilakoko riippuu mm. muunnospisteistön määrästä ja keskinäisestä sijainnista, koordinaatistojen tasaläätisyydestä sekä tavoiteltavasta muunnostarkkuudesta.

Tämän jälkeen kolmioittaisen affiinisen muunnoksen avulla lasketaan hilan jokaiselle pisteelle koordinaatit toisessa koordinaatistossa. Jos bilineaarista interpolointia haluaa hyödyntää esimerkiksi muunnoksessa  $y_{kj} \rightarrow ETRS-GK27$ , tehdään se seuraavien vaiheiden mukaisesti:

1. Muodostetaan riittävän tiheä hila (esimerkiksi 1 km x 1 km)  $y_{kj}$ -koordinaatistoon alueelle, jossa bilineaarista interpolointia tullaan käyttämään.
2. Lasketaan hilan jokaiselle pisteelle muunnetut koordinaatit kolmioittaisella affiinisella muunnoksella ETRS-GK27-koordinaatistoon. Muunnos voidaan suorittaa esimerkiksi Geodeettisen laitoksen muunnospalvelussa, Maanmittauslaitoksen muunnosohjelmalla tai itse laskien.
3. Lasketaan hilan jokaisessa pisteessä koordinaattierot koordinaatistojen välillä:

$$\begin{aligned} \Delta N &= N_{ETRS-GK27} - x_{y_{kj}} \\ \Delta E &= E_{ETRS-GK27} - y_{y_{kj}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

missä  $N_{ETRS-GK27}$ ,  $E_{ETRS-GK27}$  ovat muunnetut ETRS-GK27-koordinaatit ja  $x_{y_{kj}}$ ,  $y_{y_{kj}}$  ovat hilan  $y_{kj}$ -koordinaatit. Muodostetaan kaksi hilaa sijoittamalla lasketut koordinaattierot hilapisteisiin. Tuloksena saadaan hilat pohjois- ja itäkoordinaatin määrittämistä varten.

4. Koordinaattierojen avulla voidaan nyt hilassa bilineaarisesti interpoloida (kaavalla 5.8) haluttuun pisteeseen koordinaattierot  $\Delta N_p$ ,  $\Delta E_p$ . Bilineaarinen interpolointi on suoritettava molemmille koordinaateille erikseen.

5. Muunnetut koordinaatit ETRS-GK27-koordinaatistossa saadaan koordinaattierojen ja muunnettavan pisteen ykj-koordinaattien avulla:

$$\begin{aligned} N_{ETRS-GK27} &= x_{y_{kj}} + \Delta N_p \\ E_{ETRS-GK27} &= y_{y_{kj}} + \Delta E_p \end{aligned} \tag{5.10}$$

Hilan ja bilineaarisen interpoloinnin käyttö affiinisen kolmioittaisen muunnoksen tapauksessa ei ole sekään täysin ongelmatonta. Hilaa käytettäessä alkuperäisen kolmion kärkipisteille ei saada muunnettaessa täsmälleen samoja koordinaatteja, kuten affinisessa muunnoksessa kolmioittain. Hilamenetelmän tarkkuus suhteessa kolmioittaiseen affiiniseen muunnokseen riippuu hilan pistetiheydestä. Tiheämmällä hilalla saadaan aina parempi tarkkuus. Hilan pistetiheyden tulisi olla sellainen ettei hilan käytöstä aiheudu tarkoitukseen nähden turhaa lisävirhettä (pitää muistaa, että jo affiininen muunnos kolmioittain sisältää muunnosvirhettä). Geodeettinen laitoksen muunnospalvelusta on ladattavissa valmiita muunnoshiloja eri pistetiheyksillä, Geodeettinen laitos suosittelee valtakunnan tasolla käytettäväksi vain tarkinta 1 km x 1 km hilaa.

Lisäksi hilamenetelmässä säännöllisen suorakaiteen muotoisen hilan muodostaminen voi olla ongelmallista, jos hila ulottuu kolmioverkon ulkopuolelle. Tällöin on tarpeen luoda virtuaalisia pisteitä tai muutoin ratkaista hilan kolmioverkon ulkopuolisille pisteille arvo.

## 6 Muunnokset suomalaisten koordinaatistojen välillä

Tässä kappaleessa esitellään suomalaisten koordinaatistojen välisiä muunnoksia ja niiden tarkkuuksia. Kaavioissa on erilaisin nuolin kuvattu koordinaattikonversiot ja koordinaattimuunnokset. Kaavioista näkee myös onko muunnos mahdollista suorittaa kyseisillä tiedoilla molempiin suuntiin. Liitteissä B ja C on kaavat konversioihin ja muunnoksiin. Liitteessä D on numeerisia esimerkkejä kaavojen käytöstä.

### 6.1 Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos EUREF-FIN ja kkj-koordinaatistojen välillä

JHS 153:ssa määritellään kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos EUREF-FIN ja kkj-koordinaatistojen välille ja annetaan muunnosparametrit. EUREF-FIN on kolmiulotteinen koordinaatisto, johon voidaan liittää myös karttaprojektio. kkj on puolestaan tasokoordinaatisto. Kaavioissa 4 ja 5 on käyty läpi muunnoksen eteneminen EUREF-FIN-koordinaatistosta kkj:ään ja päinvastoin.

JHS 153:ssa annetut kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrit laskettiin 90 I luokan kolmiopisteen avulla. Jotta kolmiulotteinen muunnos kkj:n ja EUREF-FIN:n välillä voidaan laskea, pisteiden kkj-koordinaatit ja ortometriset korkeudet on redukoitava ellipsoidille. Tämä on tarpeen, jotta voidaan luoda keinotekoiset ”3D-kkj”-koordinaatit muunnoksen määrittämiseksi. kkj:ään liittyy Hayfordin ellipsoidi, joten myös korkeudet on muunnettava korkeuksiksi Hayfordin ellipsoidilta. Tähän ei voida käyttää esim. uusimpia FIN2000- ja FIN2005N00-geoidimalleja, sillä niiden geoidin korkeudet on laskettu GRS80-ellipsoidilta (EUREF-FIN:n ellipsoidi). (JHS 153)

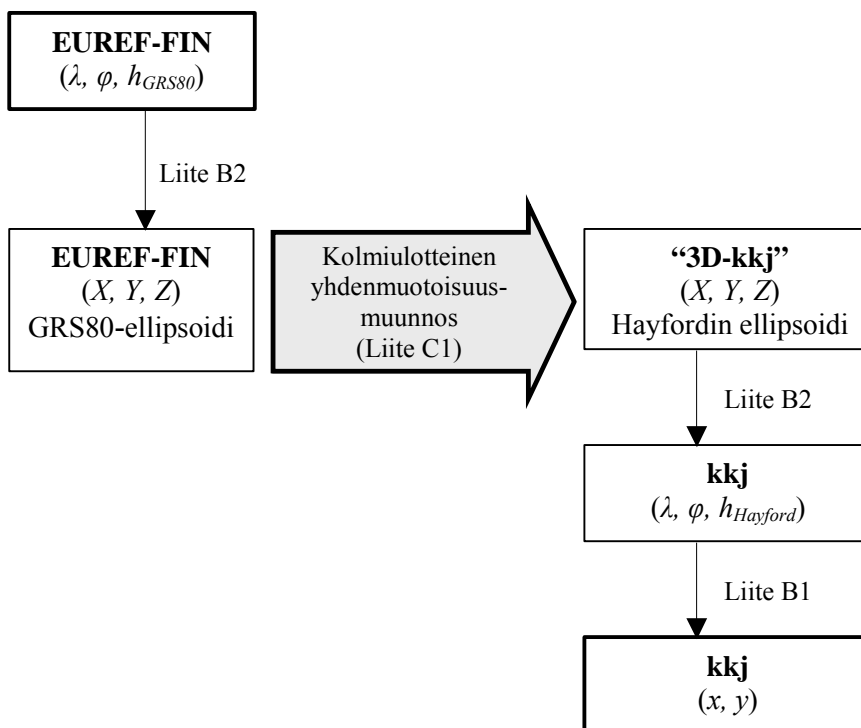
Ortometriset korkeudet saadaan korkeuksiksi Hayfordin ellipsoidilta astrogeodeettisen geoidimallin (Bomford 70) avulla. Sen geoidin korkeudet on laskettu Hayfordin ellipsoidista, jota käytettiin myös vuoden 1966 yhteistasoituksessa. Bomford 70-geoidimallin avulla muunnoksessa mukana olleille kolmiopisteille laskettiin korkeus Hayfordin ellipsoidista. Tämän jälkeen maantieteelliset kkj-koordinaatit ja ellipsoidiset korkeudet konvertoitiin suorakulmaisiksi ”3D-kkj”-koordinaateiksi.

Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrit määritettiin näin luodun ”3D-kkj:n” ja EUREF-FIN:n välille. Muunnosparametreilla pystyy muuntamaan koordinaatteja noin metrin tarkkuudella. Suurimmat jäännösvirheet kolmiulotteisessa muunnoksessa ovat n. 2 metriä. (JHS 153)

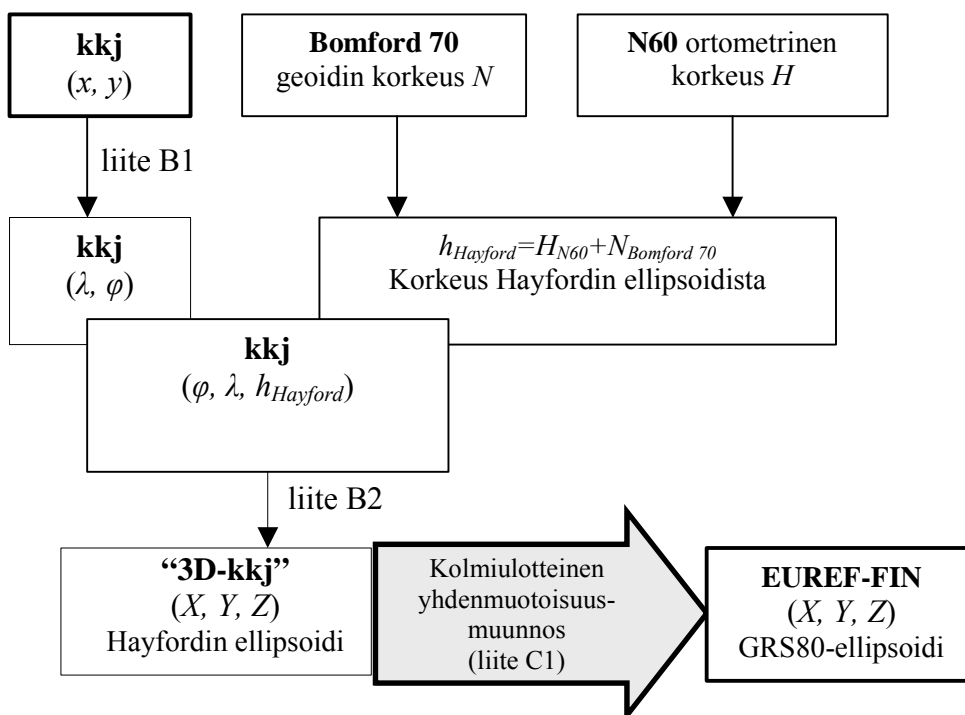
EUREF-FIN-koordinaattien muuntaminen kkj-tasokoordinaateiksi voidaan suorittaa taulukossa 4 annetuilla parametreilla kaavion 4 mukaisesti. Mikäli halutaan myös likimääräinen ortometrinen N60-korkeus, saadaan se FIN2000-geoidimallin ja ellipsoidisen korkeuden  $h_{EUREF-FIN}$  avulla.

kkj-koordinaattien muuntaminen EUREF-FIN-koordinaateiksi (kaavio 5) ei ole yhtä yksiselitteistä kolmiulotteisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella, koska astrogeodeettisen geoidimallin korkeudet tunnetaan vain I luokan kolmiopisteillä. Jos muunnosta halutaan käyttää, tulee muunnettavan pisteen geoidin korkeudet Hayfordin ellipsoidilta interpoloida tunnettujen kolmiopisteiden geoidin korkeuksista. Bomfordin geoidin korkeudet muunnoksen 90 vastinpisteelle on julkaistu JHS153:ssa (taulukossa 3).





**Kaavio 4.** EUREF-FIN-koordinaattien muuttamien kkj-koordinaateiksi kolmiulotteisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella.



**Kaavio 5.** Periaate, miten kkj-koordinaatteja voi muuntaa EUREF-FIN koordinaateiksi kolmiulotteisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella. Ongelmia muunnoksessa tuottaa Bomford 70-geoidimallin korkeudet, joita ei ole saatavilla muille kuin I luokan kolmiopisteille.

**Taulukko 4.** Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrit EUREF-FIN:n ja kkj:n välille. Muunnosparametreja käytettäessä kaavoissa kaarisekunnit tulee muuntaa radiaaneiksi. (JHS 153)

	EUREF-FIN→ kkj	kkj→ EUREF-FIN	Yksikkö
$\Delta X$	96.0610	-96.0617	m
$\Delta Y$	82.4298	-82.4278	m
$\Delta Z$	121.7485	-121.7535	m
$\varepsilon_x$	4.80109	-4.80107	kaarisek.
$\varepsilon_y$	0.34546	-0.34543	kaarisek.
$\varepsilon_z$	-1.37645	1.37646	kaarisek.
$m$	-1.49651	1.49640	ppm

## 6.2 Tasomuunnokset kkj ja EUREF-FIN-koordinaatistojen välillä

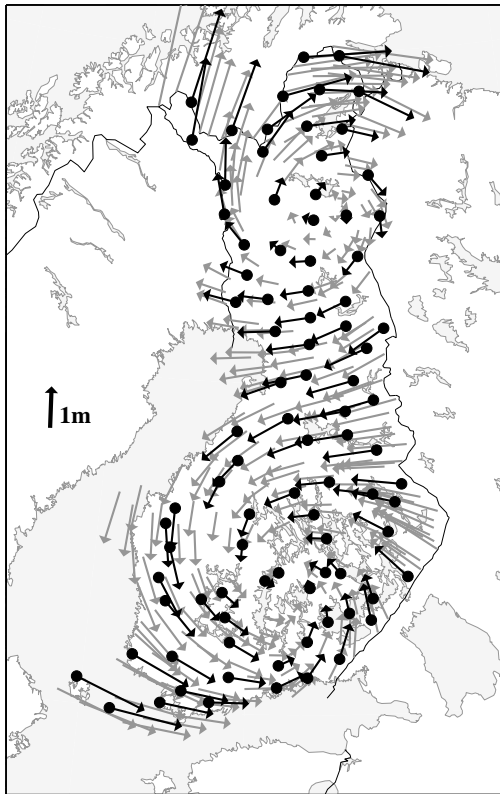
Kolmiulotteisen muunnoksen sijaan voi olla tarkoituksenmukaisempaa käyttää tasomuunnosta. Projisoimalla EUREF-FIN-koordinaatit sopivalle tasolle voidaan koordinaatteja muuntaa tasomuunnoksella kaavion 6 mukaisesti. Mikäli muunnostarkkuudeksi riittää metriluokan tarkkuus, voidaan käyttää valtakunnallista neliparametrin yhdenmuotoisuusmuunnosta. Tarkemmissa muunnoksissa pitää käyttää joko paikallista neliparametrin yhdenmuotoisuusmuunnosta, paikallista affiinista muunnosta tai vaihtoehtoisesti valtakunnallista kolmioittaista affiinista muunnosta.

### 6.2.1 Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnos tasossa koko Suomen alueelle

Taulukossa 5 on annettu muunnosparametrit neliparametriseen yhdenmuotoisuusmuunnokseen (kaava 5.4) ykj- ja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistojen välille. Muunnosparametrit on laskettu liitteessä C2 annetuilla kaavoilla samojen 90 pisteen avulla kuin JHS 153 suosituksessa annetut kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrit. Pisteet kuuluvat I luokan kolmioverkkoon ja ne ovat osana pistejoukkoa, jolla EUREF-FIN-koordinaatisto on määritetty.

Muunnosta testattiin laskemalla saaduilla muunnosparametreilla testipisteille koordinaatit. Testipisteistönä käytettiin osin samaa pisteistöä, jonka avulla affiininen muunnos kolmioittain on määritetty. Muunnoksen keskimääräiseksi tarkkuudeksi ko. pisteillä saatiin  $\pm 0.76$  m, suurimpien virheiden ollessa yli 2 metriä. Kuvassa 27 muunnosvirheet on esitetty harmaina ja jäännösvirheet mustina vektoreina. Kuva osoittaa testipisteistön virheiden odotetusti myötäilevän muunnospisteistön jäännösvirheitä. Muunnos- ja jäännösvirheet kuvastavat pääosin kkj-koordinaatiston sisäisiä virheitä. (Puupponen, 2007).





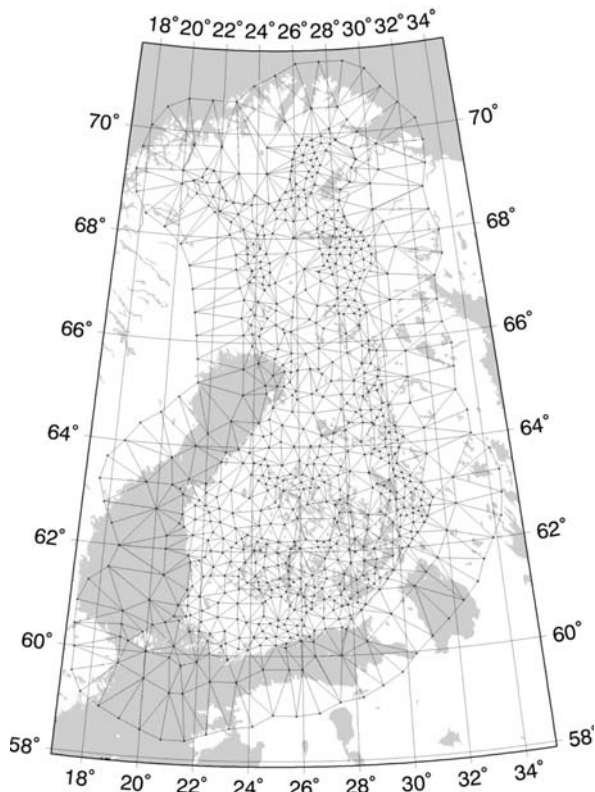
**Kuva 27.** Neliparametrisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen tarkkuus ETRS-TM35FIN:n ja ykj:n välillä. Mustat pisteet ovat muunnosparametrien määrittämiseen käytettyjä pisteitä, mustat vektorit ovat muunnospisteiden jäännösvirheitä ja harmaat testipisteiden muunnosvirheitä.

### 6.2.2 Affiinen muunnos kolmioittain ykj- ja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistojen välillä

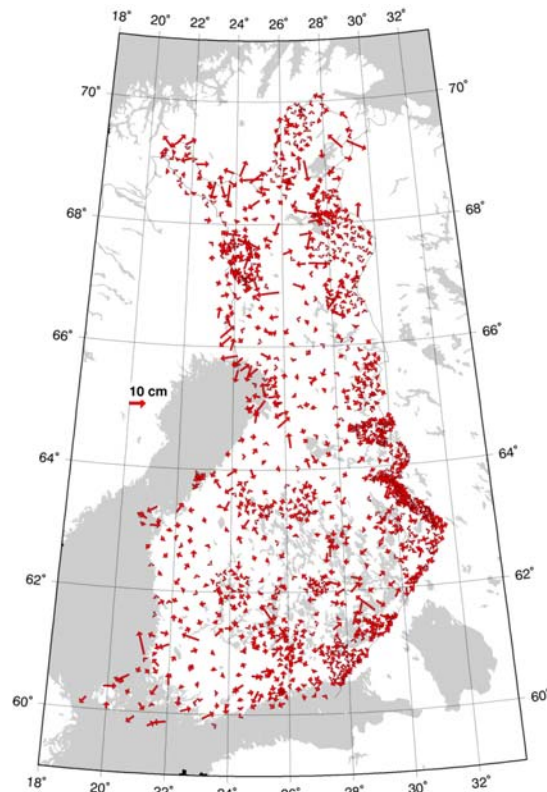
JHS154 määrittelee kkj- ja ETRS89-järjestelmien väliseksi tarkaksi muunnokseksi affiinisen muunnoksen kolmioittain. Muunnos on määritelty tehtäväksi ykj- ja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistojen välille. Testipisteillä on todettu kolmioittaisella affiinisella muunnoksella päästävän keskimäärin parempaan kuin 10 cm:n tasotarkkuuteen (neliökeskivirhe) koko Suomen alueella (Kuva 29) (JHS 154). Liitteessä D muunnospolku kulkee ETRS-GK27:n kautta esimerkin vuoksi vaikka muunnos olisi voitu tehdä suoraakin.

Affiinen muunnos kolmioittain on paikallinen muunnos, mikä selittää suuren osan sen tarkkuudesta. Tarkkuus tulee siitä, että sen avulla jäljitellään kkj-koordinaatiston vääristymiä jokaisessa kolmiossa erikseen. Affiinisen muunnoksen parametrit määritetään jokaiselle kolmiolle sen kärkipisteiden koordinaattien avulla ilman ylimääritystä. Kolmiot on muodostettu Geodeettisen laitoksen, Merenkululaitoksen ja Maanmittauslaitoksen mittaamista EUREF-FIN-pisteistä. Pisteitä on yhteensä 624 ja lisäksi on laskennallisesti muodostettu 143 virtuaalista pistettä valtakunnan rajojen ulkopuolelle (Kuva 28).

Tarkimpia muunnospisteitä ovat I luokan kolmiopisteet. Varsinkin Etelä-Suomessa I luokan pisteitä on harvassa. Verkon tihtämiseksi kolmioittaiseen affiiniseen muunnokseen otettiin mukaan myös luotettavasti määritettyjä alemman luokan pisteitä. Varsinkin itärajan tuntumassa ja Pohjois-Suomen erämaa-alueilla ongelmana oli muunnokseen soveltuvien pisteiden vähyys. Muunnoksen luonteesta johtuen Suomen rajojen ulkopuolelle määritettiin virtuaalisia pisteitä muuntamalla lähimpien todellisten muunnospisteiden avulla. Lähempänä olevat virtuaalipisteet määritettiin tasomuunnoksella ja kauempana rajasta olevat kolmiulotteisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella.



**Kuva 28.** Kolmioittaisessa affinisessa muunnoksessa käytetyt kolmiot. Kuva: Matti Ollikainen / JHS 154



**Kuva 29.** Kolmioittaisen affiinisän muunnoksen tarkkuus. Kuva: Matti Ollikainen / JHS 154.

Menetelmä ei sisällä lainkaan ylimäärittystä, joten mahdolliset karkeat virheet jäävät huomaamatta. Muunnosta luotaessa karkeat virheet paikannettiin siten, että vuorollaan yksi piste jätettiin pois laskennasta ja muodostettiin kolmiot ilman kyseistä pistettä. Tämän jälkeen tehdyllä muunnoksella tarkistettiin että pois jätetyn pisteen koordinaatit eivät muutu muunnoksessa merkittävästi.

### 6.3 Paikalliset koordinaatistot

Suurimmalla osalla kiinteistörekisteriä pitävistä kunnista on koordinaatistona Kartastokoordinaattijärjestelmä, osa käyttää Helsingin järjestelmää (valtion vanha järjestelmä, vvj) ja muutamilla kunnilla on käytössään erilliskoordinaatisto. Erilliskoordinaatistojen luonnissa on käytetty yleensä tavalla tai toisella lähtötietoina kkj:ää tai Helsingin järjestelmää. Joissain tapauksissa kunnilla on esimerkiksi kuntaliitoksen seurauksena useampia koordinaatistoja rinnakkain käytössä. Esimerkiksi asemakaava-alueella voidaan käyttää eri koordinaatistoa kuin haja-asutusalueella. Kuntien kolmioverkot saattavat olla heterogeenisiä ja sisältävät joissain tapauksissa huomattavia paikallisia vääristymiä.

Ongelmia ilmenee erityisesti tapauksissa, joissa halutaan yhtenäistää koordinaatistoja esimerkiksi kuntaliitosten tai paikkatietojen yhteiskäytön yhteydessä. GNSS-tekniikan hyödyntäminen maastomittauksissa on aiheuttanut tilanteen, jossa on tullut tarpeelliseksi määrittää muunnos EUREF-FIN-koordinaatiston ja paikallisen koordinaatiston välille.

Tulevaisuudessa ainakin osa kunnista siirtynee käyttämään EUREF-FIN-koordinaatistoa ja siihen liittyviä tasokoordinaatistoja. Uuteen koordinaatistoon siirtyminen on raskas prosessi ja siirtymävaiheessa todennäköisesti käytetään useampaa järjestelmää rinnakkain. EUREF-FIN-koordinaatistoon siirtymisen etuina ovat mm. suora liitäntä valtakunnallisten organisaatioiden järjestelmiin ja suurten alueiden saattaminen samaan järjestelmään mm. kuntaliitosten yhteydessä sekä tietojen helppo vaihdettavuus esim. EU:n INSPIRE-direktiivin vaatimusten edellyttämällä tavalla. Lisäksi satelliittipaikannuksella luotu tarkka ja homogeeninen koordinaatisto mahdollistaa GNSS-teknologian tarkkuuden hyödyntämisen ilman muunnoksia.

### 6.3.1 EUREF-FIN:iin liittyminen

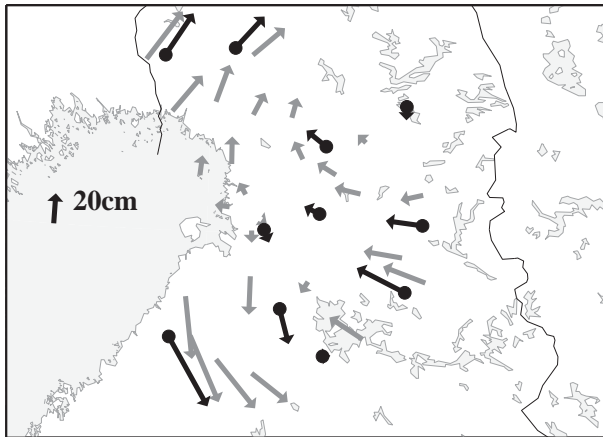
Siirryttäessä käyttämään EUREF-FIN-koordinaatistoa tai määritettäessä muunnosparametreja, on koordinaatiston tai muunnoksen määritteleville kiintopisteille mitattava tarkat EUREF-FIN-koordinaatit. Mittaus voidaan suorittaa mittaamalla paikallinen verkko staattisella GNSS-mittauksella ja sitomalla verkko I–II luokan EUREF-FIN-kiintopisteisiin (luku 3.3.2). Sidottaessa paikallinen verkko EUREF-FIN:iin, valitaan luokkajako huomioon ottaen virallisista EUREF-FIN-pisteistä lähimmät pisteet GPS-verkon lähtöpisteiksi. Mittausalueen tulee jäädä lähtöpisteiden määrittämän alueen sisälle. Mitattujen pisteiden avulla voidaan laskea muunnosparametrit esimerkiksi yhdenmuotoisuusmuunnokseen tai affiiniseen muunnokseen. Muunnospisteiden valintaan on syytä kiinnittää huomiota ja valita mahdollisimman hyvät pisteet. Muunnokseen/tarkkuuteen vaikuttavat mm. alueen koko, muunnospisteiden määrä, koordinaattien tarkkuus ja homogeenisuus, koordinaattien luotettavuus (mm. pisteiden liikkumattomuus) ja muunnosmenetelmä.

### 6.3.2 Paikallinen tasomuunnos ja muunnosmenetelmän vaikutus

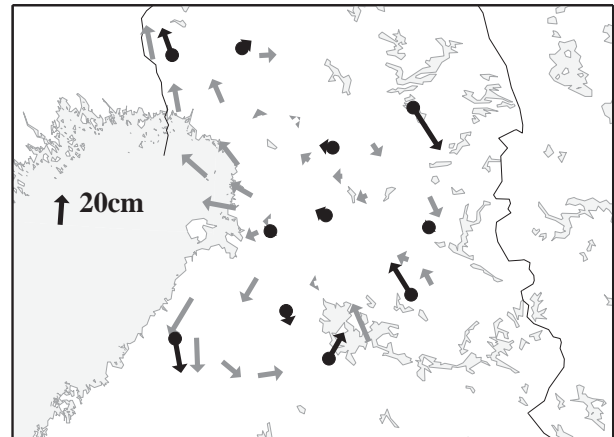
Valtakunnalliseen muunnokseen verrattuna voidaan muunnoksen tarkkuutta parantaa laskemalla paikalliset muunnosparametrit. Laskimme esimerkkinä Oulun ympäristöön paikalliset muunnosparametrit ykj- ja ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistojen välille 11 pisteen avulla. Pisteet valittiin koko maan kattavan muunnoksen pisteistöstä (kpl 6.2.1). Muunnosparametrit laskettiin sekä neliparametriseen yhdenmuotoisuusmuunnokseen että affiiniseen muunnokseen. Neliparametriseen muunnoksen neliöllinen keskivirhe (rms) oli 21 cm ja affiinisen muunnoksen 15 cm. Muunnostarkkuus parani huomattavasti koko maan kattavaan muunnokseen verrattuna; vastaavat arvot koko maan muunnoksessa olivat  $\pm 0.76$  m ja  $\pm 0.68$  m. Muunnosten jäännösvirheet on esitetty kuvissa 30 ja 31.

Muunnoksen tarkkuuteen vaikuttaa käytettävän muunnospisteistön homogeenisuus muunnosalueella. Esimerkkinä käytetyn Oulun muunnosalue on melko laaja. Laskettaessa muunnoksia kuntatasolla, voidaan päästä vieläkin parempiin tuloksiin. Tällöin pisteistöä on myös tihennettävä esimerkkipisteistöön nähden.

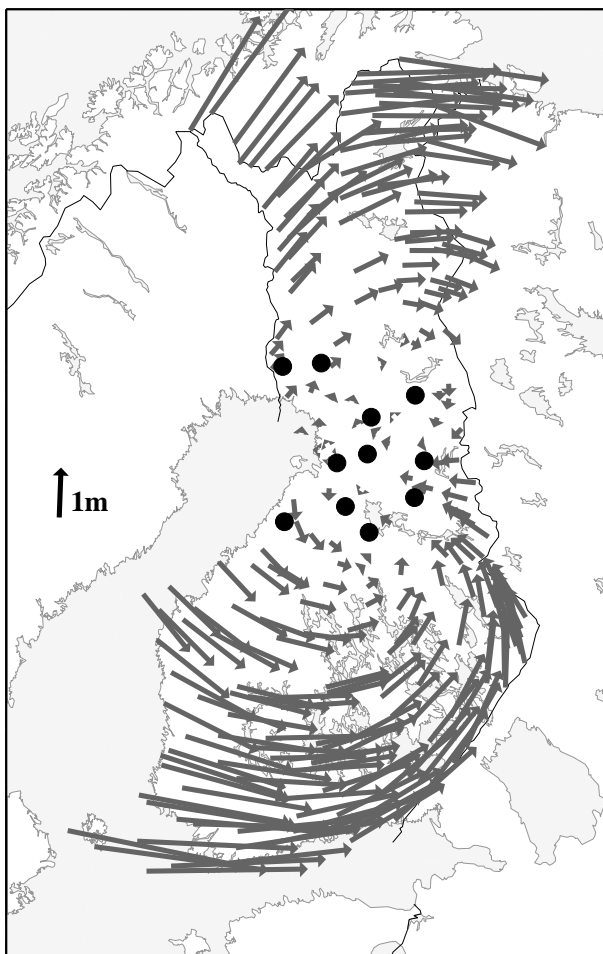
Paikallisia muunnosparametreja määritettäessä on selkeästi rajattava se alue, jossa niitä voi käyttää. Muunnosta ei tule käyttää muunnospisteiden määrittämän alueen ulkopuolella. Kuvassa 32 on muunnettu koko maan alueella olevat pisteet Oulun seudun paikallisilla muunnosparametreilla. Kuvasta nähdään, että muunnosvirheet kasvavat huomattavasti muunnosalueen ulkopuolella. (Puupponen, 2007).



**Kuva 30.** Oulun alueelle lasketun paikallisen neliparametrisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen tarkkuus. Mustat pisteet ovat muunnoksen lähtöpisteitä, mustat vektorit ovat muunnospisteiden jäännösvirheitä ja harmaat testipisteiden muunnosvirheitä.



**Kuva 31.** Paikallisen affiinisesti muunnoksen muunnospisteiden ja testipisteiden residuaalit Oulun alueella. Mustat pisteet ovat muunnoksen lähtöpisteitä, mustat vektorit ovat muunnospisteiden jäännösvirheitä ja harmaat testipisteiden muunnosvirheitä. Affiinisella muunnoksella saavutetaan usein parempi tarkkuus, koska se on joustavampi verrattuna neliparametrisen muunnokseen.



**Kuva 32.** Esimerkki virheellisestä muunnoksesta. Oulun alueelle laskettuja neliparametrisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametreja on käytetty muunnosalueen ulkopuolella. Mustat pisteet ovat muunnoksessa mukana olleita pisteitä ja harmaat testipisteiden muunnosvirheitä. Virheet muunnosalueen ulkopuolella kasvavat voimakkaasti ja tämän vuoksi parametreja saa käyttää vain alueella, joille ne on määritetty.

## 7 Yhteenveto

Paikkaan sidottu tieto ja sen hyödyntäminen on lisääntynyt räjähdysmäisesti viime aikoina. Ongelmia on kuitenkin aiheuttanut yhtenäisen määrittelyn ja ohjeistuksen puute. Erityisesti muunnoksissa käytetty terminologia ja ohjeistus on ollut hajanaista ja osin jopa sekavaa. Tässä tiedotteessa on dokumentoitu teknisiä yksityiskohtia koordinaatistoista ja koordinaatistojen välisistä muunnoksista. Tavoitteemme on säilyttää dokumentin luettavuus sellaisena, että asiaan aiemmin perehtymätönkin henkilö pystyy ymmärtämään oleelliset asiat.

Useassa kohdassa on viitattu Julkisen hallinnon suosituksiin 153 ja 154, jotka muodostavat perustan tässä esitetyille muunnoksille. Julkisen hallinnon suositus 153 määrittelee paikkatiedon tuotannossa käytettäväksi koordinaattijärjestelmäksi EUREF-FIN-koordinaatiston ja suosituksessa 154 määritellään käytettävät karttaprojektiot ja tasokoordinaatistot. Yhdeksi ongelmaksi on koettu kattavien esimerkkien puute, mitä seikkaa olemme tässä julkaisussa pyrkineet parantamaan. Tiedotteessa on selvennetty myös erilaisin kaavioin ja esimerkein koordinaattimuunnoksiin liittyvää ongelmakenttää.

Tiedotteeseen on kerätty oleellisin tieto niin kkj-koordinaatistosta kuin uudesta EUREF-FIN-koordinaatistosta ja niihin liittyvistä muunnoksista ja suositelluista muunnosmenetelmistä. EUREF-FIN:iin liittyvistä projektiosta suositellaan valtakunnan tasolla käytettäväksi UTM-projektioon perustuvaa ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistoa, mutta paikallisissa suurta tarkkuutta vaativissa tehtävissä voidaan käyttää myös ETRS-GKn-tasokoordinaatistoja.

JHS 154:ssa on määritelty virallinen muunnos ETRS-TM35FIN- ja ykj-tasokoordinaatistojen välille. Suosituksena on käyttää kolmioittaista affiinista muunnosta, kun muunnostarkkuudessa halutaan päästä desimetriluokan tarkkuuteen. Kolmioittainen affiininen muunnos on melko monimutkainen muunnosmenetelmä eivätkä maastotallentimet tai paikkatieto-ohjelmat tue sitä sellaisenaan. Kolmioittaisen affiinisien muunnoksen tarkkuus voidaan kumminkin hyödyntää bilineaarisen interpoloinnin avulla. Tiedotteessa on selitetty kuinka affiinisella kolmiomuunnoksella lasketaan muunnoshila, joka voidaan ladata maastotallentimeen tai paikkatieto-ohjelmistoon.

Valmiit muunnoshilat ovat ladattavissa Geodeettisen laitoksen muunnospalvelusta, joka avattiin syksyllä 2008. Palvelu kattaa myös tässä tiedotteessa esitetyt valtakunnalliset koordinaatistot ja niiden väliset muunnokset. Lisäksi palveluun on koottu tietoa, linkkejä ja sähköisiä dokumentteja koordinaatistoihin ja muunnoksiin liittyen. Muunnospalvelu löytyy osoitteesta: <http://coordtrans.fgi.fi>



## 8 Lähdeluettelo

ALTAMIMI, Z., C. BOUCHER JA P. SILLARD (2004). Conventional Terrestrial Reference System and Frame. In McCarthy, D. and G. Petit (eds.): IERS Conventions (2003). *IERS Technical Note No. 32*. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2004.

ANNONI, A. JA LUZET, C. (EDS.) (2000). Spatial Reference Systems for Europe. EC- Workshop 29–30 Nov 1999, Marne - La Vallée; *Proceedings and Recommendations*. European Communities 2000. (EUR 19575 EN.)

<http://www.mapref.org/LinkedDocuments/spatialref.pdf> [viitattu 7.2.2008]

BILKER-KOIVULA, M. JA MATTI OLLIKAINEN (2009). Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. *Geodeettisen laitoksen tiedote* N:o. **29**. Kirkkonummi 2009. ISBN 978-951-711-259-8

BOMFORD, G. (1963). Report of Study Group N:o 10. The Geoid in Europe and Connected Countries. *Travaux de l'Association Internationale de Géodésie*, **22**, 1963.

BOUCHER, C. (2001). Terrestrial Coordinate Systems and Frames. In *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, Version 1.0, Nature Publishing Group, and Bristol: Institute of Physics Publishing, pp. 3289–3292.

BOUCHER, C. JA Z. ALTAMIMI (1992). The EUREF Terrestrial Reference System and its First Realization. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF) held in Florence 28–31 May 1990. *Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. Heft **52**. München.

BOUCHER, C. JA Z. ALTAMIMI (1995), Specification for Reference Frame Fixing in the Analysis of a EUREF GPS Campaign. VII Meeting of the EUREF TWG in Bern, March 9–10, 1995. *Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung*, Heft **56**, 265–267. München.

BOUCHER, C. JA Z. ALTAMIMI (1998). Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign. Version 4, 08-01-1998.

DMA (1989). The Universal Grids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS). *DMA technical manual* DMA TM 8358.2. Edition 1. September 1989.

[http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tm8358.2/TM8358\\_2.pdf](http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tm8358.2/TM8358_2.pdf)

[viitattu 7.2.2008]

EPN (2008). EUREF Permanent Network.

<http://www.epncb.oma.be/>

[viitattu 24.12.2008]

ETRS89 (2008). European Terrestrial Reference System 89.  
<http://etrs89.ensg.ign.fr/> [viitattu 10.12.2008]

GEODEETTINEN LAITOS (1999). Suomen valtakunnallisten koordinaattijärjestelmien ajantasaistaminen. *Työryhmäraportti*.

GURTNER, W., S. FANKHAUSER, W. EHNSPERGER, W. WENDE, H. FRIEDHOFF, H. HABRICH JA S. BOTTON. (1992). EUREF89 GPS Campaign -Results of the Processing by the "Berne Group"- . Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF) held in Florence 28–31 May 1990. *Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. Heft **52**. München.

GUSTAFSSON, A. A. (1928). Taloudellisten mittauten liittäminen maan kolmioverkkoon. *Maanmittaus*, **3**, 1928.

HEISKANEN, W. A. JA H. MORITZ (1967). *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co., San Francisco.

HONKASALO, T. (1950). Measuring of the 864 m-long Nummela standard base line with the Väisälä light interference comparator and some investigations into invar wires. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **37**. Helsinki 1950.

IERS (2008). International Earth Rotation and Reference Systems Service.  
<http://www.iers.org/> [viitattu 10.12.2008]

IGS (2008). The International GNSS Service.  
<http://igscb.jpl.nasa.gov> [viitattu 10.12.2008]

ITRF (2008). International Terrestrial Reference Frame.  
<http://itrf.ensg.ign.fr/> [viitattu 10.12.2008]

JHS 153. ETRS89-järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa.  
<http://www.jhs-suositukset.fi> [viitattu 10.12.2008]

JHS 154. ETRS89-järjestelmään liittyvät karttaprojektiot, tasokoordinaatistot ja karttalehtijako.  
<http://www.jhs-suositukset.fi> [viitattu 10.12.2008]

JHS 163. Suomen korkeusjärjestelmä N2000.  
<http://www.jhs-suositukset.fi> [viitattu 7.8.2008]

JOKELA, J. (1994). The 1993 adjustment of the Finnish first-order terrestrial triangulation. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **119**. Helsinki 1994. ISBN 951-711-173-8.

JOKELA, J. JA M. POUTANEN (1998). The Väisälä baselines in Finland. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **127**. Kirkkonummi 1998. ISBN 951-711-220-3.

- JOKELA, J. JA P. HÄKLI (2006). Current research and development at the Nummela Standard Baseline. *Conference proceedings. Shaping the Change, XXIII FIG Congress, Munich, Germany, October 8–13, 2006.* 15pp.
- KALLIO, U. (1998). *Tasoituskasku*. Otatieta. Helsinki, 1998. ISBN 951-672-267-9.
- KOIVULA, H. (2006). Implementation and Prospects for Use of a High Precision Geodetic GPS Monitoring Network (FinnRef) Covering Finland. *Lisensiaattityö*. Espoo, 2006.
- KORHONEN, J., V.R. ÖLANDER, E. HYTÖNEN. (1959). The results of the base extension nets of the Finnish primary triangulation. *Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **51**. Helsinki 1959.
- KORHONEN, J. (1966). Horizontal angles in the first order triangulation of Finland in 1920–1962. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **62**. Helsinki 1966.
- KORHONEN, J. (1967). Coordinates of the stations in the first order triangulation of Finland. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **64**. Helsinki 1967.
- KUKKAMÄKI, T. J. (1978). Väisälä interference comparator. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **87**. Helsinki 1978.
- KÄÄRIÄINEN, E. (1963). Suomen toisen tarkkavaaituksen kiintopisteluettelo I. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **57**. Helsinki 1963.
- KÄÄRIÄINEN, E. (1966). The Second Levelling of Finland in 1935–1955. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **61**. Helsinki 1966.
- KÄÄRIÄINEN, J. (2001). Suomen valtakunnallisen koordinaattijärjestelmän uudistaminen. Maanmittaustieteiden päivät 8.–9.11.2001. Koordinaatistot murroksessa. *Maanmittaustieteiden Seuran julkaisu* **39**.
- LEHMUSKOSKI, P., V. SAARANEN, M. TAKALO JA P. ROUHIAINEN (2008). Suomen kolmannen tarkkavaaituksen kiintopisteluettelo. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **139**. Kirkkonummi 2008.
- MMH (1970). *Maanmittaushallituksen kiertokirjelmä* n:o **5/70** valtion kartastotöissä käytettävää koordinaatistosta. Annettu Helsingissä 9. päivänä lokakuuta 1970.
- MORITZ, H. (2000). Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, Volume **74**, number 1. s. 128–133.
- NGA (2006). Addendum to NIMA TR 8350.2: Implementation of the World Geodetic System 1984 (WGS 84) Reference Frame G1150.  
[http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/tr8350\\_2.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/tr8350_2.html)  
 [viitattu 15.5.2009]

NIMA (2000). Department of Defense World Geodetic System 1984 – Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems. National Imagery and Mapping Agency (NIMA). *Technical Report 8350.2*, 3<sup>rd</sup> Edition 2000.

<http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>

[viitattu 7.8.2008]

OLLIKAINEN, MARKO (1994). Valtakunnallisen GPS-verkon mittaus, laskenta ja koordinaattimuunnosparametrien määrittäminen. *Maanmittaus* **69:1**, 1994. s. 38–70

OLLIKAINEN, MATTI (1977). Astronomical azimuth determinations on triangulation stations in 1962–1970. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **84**. Helsinki 1977. ISBN 951-711-040-5.

OLLIKAINEN, MATTI (1982). Astronomical determinations of latitude and longitude in 1976–1980. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **95**. Helsinki 1982. ISBN 951-711-075-8.

OLLIKAINEN, MATTI (1993). GPS-koordinaattien muuntaminen Kartastokoordinaateiksi. *Geodeettisen laitoksen tiedote* N:o **8**. Helsinki.

OLLIKAINEN, MATTI (1997). Determination of orthometric heights using GPS levelling. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **123**. Kirkkonummi 1997. ISBN 951-711-210-6.

OLLIKAINEN, MATTI., H. KOIVULA, M. POUTANEN JA R. CHEN (1997). Suomen kiinteiden GPS-asemien verkko. *Geodeettisen laitoksen tiedote* N:o **16**. ISBN 951-711-204-1.

OLLIKAINEN, MATTI., H. KOIVULA JA M. POUTANEN (1999). The Densification of the EUREF Network in Finland. IAG, Section I – Positioning, Commission X – Global and Regional Geodetic Networks, Subcommission for Europe (EUREF). Report on the Symposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF) held in Prague, 2–5 June 1999. *Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung*, Heft **60**, 114–122. München.

OLLIKAINEN, MATTI., H. KOIVULA JA M. POUTANEN (2000). The Densification of the EUREF Network in Finland. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisuja* N:o **129**. Kirkkonummi 2000. ISBN 951-711-236-X.

OLLIKAINEN, MATTI., H. KOIVULA JA M. POUTANEN (2001). EUREF-FIN-koordinaatisto ja EUREF-pistetihennykset Suomessa. *Geodeettisen laitoksen tiedote* **24**. ISBN 951-711-243-2.

OLLIKAINEN, MATTI (2002). The Finnish geoid model FIN2000. *Proceedings of the XIV General Meeting of the Nordic Geodetic Commission*. s.111–116. 1–5.10.2002. TKK, Espoo.

POUTANEN, M. (2000). Sea surface topography and vertical datums using space geodetic techniques. *Suomen geodeettisen laitoksen julkaisuja* **128**. Kirkkonummi. ISBN 951-711-235-1.

POUTANEN, M. JA V. SAARANEN.(2004). Suomen uusi korkeusjärjestelmä. *Maanmittaustieteiden Seuran julkaisu* n:o **41**. s 26–31. Maanmittaustieteiden päivät 18.–19.11.2004. TKK, Espoo.

- PUUPPONEN, J. (2007). Suomen geodeettiset koordinaatit ja niiden väliset muunnokset. *Diplomityö*. Teknillinen korkeakoulu. Espoo 2007.
- RAINESALO, A. (1927). Geodesia. Yleisesikunnan julkaisu. Otava, Helsinki. 606 s.
- VERMEER, M., M. VÄISÄNEN JA J. MÄKYNEN (2004). Paikalliset koordinaatit ja muunnokset : Projektin tekninen loppuraportti. *Teknillisen korkeakoulun Geodesian laboratorion julkaisu* **37**. ISBN: 951-22-7111-7.
- VESTØL, O. (2006). Determination of postglacial land uplift in Fennoscandia from leveling, tide-gauges and continuous GPS stations using least squares collocation. *J. Geod.* **80**: 248–258  
DOI 10.1007/s00190-006-0063-7
- VÄISÄLÄ, Y. (1923). Die Anwendung der Lichtinterferenz zu Längenmessungen auf grösseren Distanzen. *Suomen Geodeettisen laitoksen julkaisu* N:o **2**. Helsinki 1923.
- WHITTEN, C. A. (1952). Adjustment of European triangulation. *Bulletin Geodesique*. 1952 N:o **24**. Pariisi.
- ÅGREN J. JA SVENSSON R. (2007). Postglacial Land Uplift Model and System Definition for the New Swedish Height System RH 2000. *LMV-Rapport* **2007:4**. ISSN 280-5731, Gävle. 124 p.
- ÖLANDER, V. R. (1963). Geodeettisen laitoksen kolmiomittaukset ja Suomen kartastotöissä käytetyt koordinaatit. *Maanmittaus*, **38**, 1963.

## Liitteet

### Liite A. Lyhenteet ja määritelmät

Termit on yhtenäistetty mahdollisuuksien mukaan JHS:ien kanssa.

#### **2D**

Kaksiulotteinen

#### **3D**

Kolmiulotteinen

#### **3D-koordinaatisto**

Yleensä 3D-koordinaatistolla tarkoitetaan geodesiassa CTRS:n mukaista koordinaatistoa. Kolmiulotteisessa koordinaatistossa koordinaatit ilmoitetaan joko suorakulmaisina  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ -koordinaatteina tai maantieteellisinä koordinaatteina ja korkeutena vertausellipsoidista

#### **BIH**

*Bureau International de l'Heure*

Kansainvälinen aikapalvelutoimisto, jonka toiminta siirtyi vuonna 1987 IERS organisaatioon (International Earth Rotation and Reference System Service).

#### **BLR**

*Baltic Levelling Ring*

Itämeren ympäri kansallisista verkoista muodostettu vaaitusverkko.

#### **Bomford 70 -geoidimalli**

Astrogeodeettinen Bomford 70 -geoidimalli perustuu I luokan kolmiopisteillä tehtyihin tähtitieteellisiin havaintoihin. Geoidimalli laskettiin luotiviivanpoikkeamien avulla. Geoidimallin arvot määritettiin lähtien tunnetun pisteen geoidin arvosta  $N_A$  integroimalla.

Suomessa astrogeodeettisen geoidimallin lähtötaso eli lähtöpisteen geoidin korkeus otettiin eurooppalaisesta vuonna 1963 julkaistusta astrogeodeettisesta geoidista (Bomford, 1963). Geoidin korkeuksia muutettiin -0.9 metrin vakiokorjauksella G. Bomfordin ilmoituksen perusteella vuonna 1970. Tälle geoidimallille annettiin sittemmin nimeksi Bomford 70. Geoidimallin vertauspintana on käytetty Hayfordin ellipsoidia (Kansainvälinen ellipsoidi 1924). Tarkempi kuvaus astrogeodeettisesta vaaituksesta ja Suomen astrogeodeettisesta geoidimallista löytyy mm. lähteistä Heiskanen ja Moritz (1967) ja Ollikainen (1997).

#### **BTS**

*BIH Terrestrial System*

#### **CTRF**

*Conventional Terrestrial Reference Frame*

CTRF:n mukainen koordinaatisto määritellään joukkona fyysisiä pisteitä, joilla on tarkasti määritetyt koordinaatit tietyssä CTRS:n mukaisessa koordinaattijärjestelmässä. CTRF voi olla dynaa-

minen tai kinemaattinen koordinaatisto riippuen siitä onko koordinaattien määrittämisessä käytetty dynaamista mallia vai ei. Esimerkiksi satelliittien radat ovat dynaamisessa koordinaatistossa kun taas Maahan sidotuissa verkoissa on useimmiten käytetty kinemaattista koordinaatistoa. Satelliittipaikannukseen liittyvillä suorakulmaisilla 3D-koordinaatistoilla tarkoitetaan tavallisesti CTRS:n mukaista globaalia todellista geosentristä kinemaattista koordinaatistoa. (Boucher, 2001; Altamimi *et al.*, 2004).

## **CTRS**

### *Conventional Terrestrial Reference System*

Maahan sidottu koordinaattijärjestelmä, joka määrittellään joukolla sopimuksia, algoritmeja ja vakioita, jotka määrittävät järjestelmän origon, mittakaavan ja orientoinnin sekä niiden aikariippuvuuden. Käytössä on kahdentyyppisiä CTRS:n mukaisia järjestelmiä: paikallisia/toposentrisiä ja globaaleja/geosentrisiä järjestelmiä. Globaalissa geodesiassa CTRS:llä tarkoitetaan järjestelmää, jonka origo on maapallon massakeskipisteessä (tai lähellä sitä) ja orientointi on ekvatoriaalinen (Z-akseli osoittaa maapallon pyörimisakselin suuntaan). Geosentriset CTRS:t voidaan vielä jakaa todellisiin ja näennäis(kvasi-)geosentrisiin järjestelmiin. Todellisissa geosentrisissä järjestelmissä origo on lähellä Maan massakeskipistettä ja nollameridiaanit (X-akselit) ovat lähes identtisiä ja osoittavat Greenwichin meridiaaniin. Kvasigeosentriset järjestelmät on luotu terrestriä geodeettisia menetelmiä käyttäen sitoen ne johonkin lähtöpisteeseen. Niiden origo voi poiketa massakeskipisteestä useita satoja metrejä ja nollameridiaani on usein sidottu johonkin tähtitieteelliseen observatorioon. (Boucher, 2001; Altamimi *et al.*, 2004).

IERS on päivittämässä konventioitaan IUGG:n (International Union of Geodesy and Geophysics) Perugia kokouksen 2007 resoluution 2 mukaisesti IAU:n (International Astronomical Union) määritelmien kanssa yhteneviksi. Resoluutiossa 2 ja konvention työversiossa (päivitetty 10.4.2009) esitellään uusi määritelmä GTRS (Geocentric Terrestrial Reference System), joka korvaa osittain nykyisin käytetyn CTRS-termin, joskin CTRS tämän mukaisesti jää yleistermiksi kuvaamaan sopimukseen perustuvia Maahan sidottuja koordinaattijärjestelmiä. Uuden konvention työversio muuttaa myös CTRF:n määritelmää uuden termin ollessa TRF.

## **datumi**

Datumilla tarkoitetaan parametreja, jotka kiinnittävät koordinaatiston tarkastelun kohteena olevaan kokonaisuuteen. *Paikallinen datumi* on paikallisen koordinaatiston origon ja orientaation määrittelevä datumi. *Horisontaalinen datumi (tasodatumi)* käsittää vertauspinnan ja koordinaatiston nollatasot (akselit) geodeettisen koordinaatiston horisontaalisten koordinaattien ilmaise- mista varten. *Korkeusdatumi* määrittelee korkeusjärjestelmän vertauspinnan eli nollatason, jonka suhteen pisteiden korkeudet ilmaistaan ja sitoo sen maahan. *Geodeettinen datumi* määrittelee valitun vertausellipsoidin tai kolmiulotteisen suorakulmaisen koordinaatiston sijainnin ja orientaation suhteessa Maahan. (JHS 153)

## **DMA**

*Defence Mapping Agency*

## **DoD**

*Department of Defence*

**ED50**

*European Datum 1950*

Euroopan kolmioverkkojen 1950-luvulla tehty yhteistasoitus. Myös tähän perustuva kansallinen koordinaatisto, jossa vain lähtöpisteen koordinaatit otettiin eurooppalaisesta ED50-tasoituksesta, mutta muiden pisteiden koordinaatit saatiin vuoden 1966 kansallisesti tehdystä yhteistasoituksesta.

**ED87**

*European Datum 1987*

Euroopan kolmioverkkojen 1980-luvun lopulla tehty tasoitus.

**EPN**

*EUREF Permanent Network*

Euroopan pysyvien GNSS-asemien verkko.

<http://www.epncb.oma.be>

**epookki**

Epookki on ajanhetki, johon jonkin koordinaatiston koordinaatit on sidottu, koordinaatisto on sidottu suhteessa maapallon keskipisteeseen tai korkeusjärjestelmän nollataso on kiinnitetty suhteessa meren keskivedenkorkeuteen.

**ETRF**

*European Terrestrial Reference Frame*

3D-koordinaatisto, jonka avulla ETRS89-järjestelmä on realisoitu. ETRS89-järjestelmästä on olemassa useita realisaatioita ETRFyy, esim. ETRF89, ETRF96 ja ETRF2000.

**ETRF89**

*European Terrestrial Reference Frame 89*

**ETRS89**

*European Terrestrial Reference System 89*

CTRS:n mukainen koordinaattijärjestelmä, joka on kiinnitetty Euraasian mannerlaatan yhtenäiseen osaan ja yhtyy ITRS-järjestelmään epookkina 1989.0.

**EUREF**

IAG:n alakomissio SC1.3a (Koordinaatistot – Alueelliset koordinaatistot – Eurooppa)

**EUREF89**

ETRS89-järjestelmän vuonna 1989 suoritettulla GPS-mittauskampanjalla muodostettu ensimmäinen euroopanlaajuinen realisaatio.

**EUREF-FIN**

ETRS89-järjestelmän kansallinen realisaatio Suomessa.

**EUVN**

*European Vertical Reference Network*



**FIN2000-geoidimalli/muunnospinta**

FIN2000-geoidimalli pohjautuu pohjoismaiseen NKG96-geoidimalliin ja 156:een eri luokkaiseen GPS-vaaituspisteeseen. FIN2000-geoidimalli muodostettiin sovittamalla NKG96-geoidimalli GPS-vaaituspisteille määritettyihin geoidinkorkeuksiin. FIN2000-geoidimallin avulla GPS:llä mitatuista EUREF-FIN korkeuksista ( $h_{EUREF-FIN}$ ) päästään N60-korkeuksiin ( $H_{N60}$ ):

$$H_{N60} = h_{EUREF-FIN} - N_{FIN2000} \quad (\text{A.1})$$

missä  $N_{FIN2000}$  on FIN2000-mallin mukainen geoidin korkeus GRS80 ellipsoidista. (Ollikainen, 2002).

**FIN2005N00-geoidimalli/muunnospinta**

FIN2005N00-geoidimalli pohjautuu pohjoismaiseen NKG2004-geoidimalliin ja 50 EUVN- ja EUVN\_DA GPS-vaaituspisteeseen. EUVN/EUVN\_DA-vaaituspisteet ovat I luokan tarkkavaaituspisteitä. FIN2005N00 muodostettiin sovittamalla NKG2004-geoidimalli GPS-vaaituspisteille määritettyihin geoidinkorkeuksiin. FIN2005N00-geoidimallin avulla GPS:llä mitatuista EUREF-FIN-korkeuksista ( $h_{EUREF-FIN}$ ) päästään N2000-korkeuksiin ( $H_{N2000}$ ):

$$H_{N2000} = h_{EUREF-FIN} - N_{FIN2005N00} \quad (\text{A.2})$$

missä  $N_{FIN2005N00}$  on FIN2000-mallin mukainen geoidin korkeus. (Bilker-Koivula ja Ollikainen, 2009)

**FinnRef<sup>®</sup>**

Geodeettisen laitoksen ylläpitämä Suomen pysyvien GPS-asemien verkko.

**Galileo**

Euroopan unionin ja Euroopan avaruusjärjestön (ESA) kehittämä satelliittipaikannusjärjestelmä. Valmistuu 2010-luvun puolivälissä.

**Gauss-Krüger-projektio**

Poikittainen lieriöprojektio (Transverse Mercator), joka sivuaa maapallon pintaa pitkin keskimeridiaania.

**geodeettinen vertausjärjestelmä, ks. vertausjärjestelmä****geodeettiset koordinaatit**

Vertausellipsoidiin kiinnitetty paikan sijainti. Geodeettiset koordinaatit ovat leveys ( $\varphi$ ) ja pituus ( $\lambda$ ) ja korkeus vertausellipsoidin pinnasta ( $h$ ). Leveys ja pituus mitataan kaarimitoissa (aste, minuutti ja sekunti) ja korkeus metreinä. Geodeettinen leveys ja pituus ilmaisevat vertausellipsoidin paikallisen normaalin suunnan ekvaattori- ja nollameridiaanitasojen suhteen. (JHS 153)

**geoidi**

Se Maan painovoimakentän potentiaalinen tasa-arvopinta, joka parhaiten yhtyy valtamerien keskivedenpintaan. Geoidin ja vertausellipsoidin välistä korkeuseroa  $N$  kutsutaan geoidin korkeudeksi.  $N$  on positiivinen ellipsoidin yläpuolella ja negatiivinen sen alapuolella. (JHS 153)

**geopotentialiluku**

Maan painovoimakentän potentiaali jossakin pisteessä geoidin potentiaalisen suhteen, lasketaan positiivisena ylöspäin. Geopotentialilukujen SI-yksikkö on  $\text{m}^2/\text{s}^2$ . Tavallisesti käytetään kuitenkin geopotentialiyksikköä (gpu),  $1 \text{ gpu} = 10 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Tarkkavaaitusten laskennassa käytetään geopotentialilukuja, jotka saadaan metrisistä korkeuseroista kertomalla ne havaintovälin keski-

määräisellä painovoimalla. Koska painovoima on likimain  $9.8 \text{ m/s}^2$ , ovat geopotentialiluvut (yksikkönä gpu) likimain 2% pienemmät kuin vastaavat metriset korkeuserot (yksikkönä m). (JHS 163)

### **geosentrinen**

Maakeskinen

### **GL**

*Geodeettinen laitos*

### **GLONASS**

*GLO*balnaja *NA*vigatsionnaja *S*putnikovaja *S*istema

( ГЛОНАСС - ГЛЮбальная НАвигационная Спутниковая Система )

Venäjän ylläpitämä satelliittipaikannusjärjestelmä.

### **GNSS**

*Global Navigation Satellite Systems*

Yhteisnimitys globaaleille satelliittipaikannusjärjestelmille kuten GPS, GLONASS ja Galileo.

### **GPS**

*Global Positioning System*

Yhdysvaltain puolustusministeriön kehittämä ja rahoittama satelliittipaikannusjärjestelmä.

### **GRS**

*Geodetic Reference System*, ks. vertausjärjestelmä

### **GRS80**

*Geodetic Reference System 1980*

Vertausjärjestelmä, jonka IAG:n yleiskokous hyväksyi vuonna 1979. GRS80 määritellään seuraavien parametrien avulla (Moritz, 2000):

Vertausellipsoidin isoakselin puolikas:	$a$	= 6378137 m
Maan geosentrinen vetovoimavakio:	$GM$	= $3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Dynaaminen muotokerroin:	$J_2$	= $108263 \cdot 10^{-8}$
Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus:	$\omega$	= $7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$

Ellipsoidin litistyssuhde voidaan laskea edellisistä, jolloin saadaan:  $f = 1/298.257222101$

### **GTRS**

*Geocentric Terrestrial Reference System*, ks. CTRS

### **Hayfordin vertausellipsoidi eli Kansainvälinen ellipsoidi, 1924**

Ellipsoidi määritellään seuraavien parametrien avulla.

Isoakselin puolikas:	$a$	= 6378388 m
Litistyssuhde:	$f$	= 1/297

Ellipsoidi ei ole geosentrinen vaan orientoitu siten, että se kuvaa Maan muotoa parhaiten Euroopan kohdalla.

## **IAG**

*International Association of Geodesy*

IUGG:n alainen kansainvälinen geodeettinen assosiaatio.

## **IERS**

*International Earth rotation and Reference system Service*

Kansainvälinen Maan pyörähdysliikettä, sen parametreja sekä koordinaattijärjestelmiä ja niiden realisaatioita määrittävä organisaatio. IAG:n palvelu.

## **IGS**

*International GNSS Service*

Kansainvälinen ja globaali pysyvien GNSS-asemien verkko, IAG:n palvelu.

<http://igsceb.jpl.nasa.gov/>

## **INSPIRE**

*Infrastructure for Spatial Information in the European Community*

EU-direktiivi.

## **ITRF**

*International Terrestrial Reference Frame*

ITRS:n realisaatio. ITRF-koordinaatteja on julkaistu useissa realisaatioissa ITRFyy, mm. ITRF2005. ITRF-koordinaatteihin on liitettävä myös ajanhetki eli epookki, esim. ITRF2005(2008.12), sillä mannerlaattojen liikkeiden vuoksi koordinaatit muuttuvat ajan mukana.

## **ITRS**

*International Terrestrial Reference System*

Globaali, 3D-koordinaattijärjestelmä, jonka perussuuret ovat GRS80-järjestelmän mukaisia ja koordinaatiston orientointi on BIH:n vuoden 1984.0 orientoinnin mukainen.

## **IUGG**

*International Union of Geodesy and Geophysics*

Kansainvälinen geodesian ja geofysiikan unioni.

## **JHS**

*Julkisen hallinnon suositus*

## **JUHTA**

*Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta*

## **karttaprojektio**

Menetelmä, jolla maapallon kolmiulotteinen pinta kuvataan kaksiulotteiselle karttatasolle. Tämä tapahtuu projisoimalla kartalla kuvattavat kohteet tasolle karttaprojektion avulla. Projisointi voi tapahtua pallopinnalta tai ellipsoidilta joko suoraan tasolle tai esimerkiksi lieriön tai kartion pinnalle, joka levitetään tasoksi. Suomessa yleisesti käytettävät karttaprojektiot ovat lieriöprojektioita. Karttaprojektio voi olla esimerkiksi oikeakulmainen, oikeapintainen tai oikeapituinen. (JHS 154)

**kkj***Kartastokoordinaattijärjestelmä***koordinaatisto**

Termiä koordinaatisto käytetään geodesiassa tarkoittamaan koordinaattijärjestelmän realisaatiota. Tällöin tarkoitetaan usein CTRF:n (Conventional Terrestrial Reference Frame) mukaista koordinaatistoa. CTRF määritellään fyysisten pisteiden joukkona, joille on tarkasti määritetyt koordinaatit tietyssä koordinaattijärjestelmässä. Koska CTRF on kolmiulotteinen suorakulmainen koordinaatisto, tarvitaan koordinaattien esittämiseen vertausellipsoidilla geodeettista vertausjärjestelmää.

**koordinaatit**

Lukuarvot, jotka määrittelevät pisteen sijainnin valitussa koordinaatistossa. Lukuarvoja on yhtä monta kuin mikä on koordinaatiston dimensio (tavallisimmin 2D ja 3D). Koordinaatit voivat olla esimerkiksi geodeettisia koordinaatteja  $(\varphi, \lambda, h)$ , avaruuskoordinaatteja  $(X, Y, Z)$  tai tasokoordinaatteja  $(x, y$  tai  $N, E)$  tai korkeuskoordinaatteja. Korkeuskoordinaatteja ovat esimerkiksi ortometrinen korkeus  $(H)$ , korkeus ellipsoidista  $(h)$  ja normaalikorkeus  $(H^*)$ . (JHS 153)

**koordinaattikonversio**

Menetelmä, jolla muunnetaan koordinaatteja kahden samaan datumiin perustuvan koordinaatiston välillä (esimerkiksi muunnos geodeettisista koordinaateista suorakulmisiin koordinaatteihin).

**koordinaattimuunnos**

Menetelmä, jolla muunnetaan koordinaatteja kahden eri datumiin perustuvan koordinaatiston välillä (esimerkiksi kkj:n ja EUREF-FIN:n välillä). Muunnos suoritetaan muunnosparametreilla, jotka on määritetty näissä koordinaatistoissa tunnettujen yhteisten pisteiden avulla. Muunnos voi olla yksiulotteinen korkeusmuunnos, kaksiulotteinen tasomuunnos tai kolmiulotteinen muunnos avaruudessa.

**koordinaattijärjestelmä**

Joukko suureita, jotka tarvitaan järjestelmän määrittelemiseksi, sijoittamiseksi ja orientoimiseksi. Geodesiassa tarkoitetaan yleensä CTRS:n mukaisia järjestelmiä, ks. CTRS.

**luotiviivan poikkeama**

Suureet, joilla määritellään paikallisen luotiviivan suunnan poikkeama vertausellipsoidin normaalista. Luotiviivan poikkeama määritellään pohjois-etelä-suuntaisen ( $\xi$ ) ja itä-länsi-suuntaisen ( $\eta$ ) komponentin avulla.  $\xi$ :n ja  $\eta$ :n yksikkö on kaarisekunti. (JHS 153)

**maantieteelliset koordinaatit**

Vertausellipsoidiin kiinnitetty paikan sijainti. Maantieteelliset koordinaatit ovat leveys ( $\varphi$ ) ja pituus ( $\lambda$ ). Ne mitataan kaarimitoissa (aste, minuutti ja sekunti) päiväntasaajatasosta ja Greenwichin nollameridiaanista lähtien. Leveys on positiivinen ekvaattorin pohjoispuolella ja negatiivinen sen eteläpuolella. Pituus kasvaa positiivisena nollameridiaanista itään. (JHS 153)

**MMH***Maanmittaushallitus*

**MML***Maanmittauslaitos***NAP***Normaal Amsterdams Peil***NGA***National Geospatial-intelligence Agency***NIMA***National Imagery and Mapping Agency***NKG***Nordiska Kommissionen för Geodesi*  
Pohjoismainen geodeettinen komissio**NNSS***Navy Navigation Satellite System***normaalikorkeus**

Normaalikorkeus saadaan jakamalla geopotentialiluku keskimääräisellä normaalipainovoimalla:

$$H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}} \quad , \quad (\text{A.3})$$

missä  $\bar{\gamma}$  on keskimääräinen normaalipainovoima laskettuna normaalipainovoimakentän luotiviivaa pitkin vertausellipsoidin ja sen pisteen välillä, jossa normaalipainovoimakentän potentiaaliero ellipsoidiin on sama kuin havaintopaikan todellisen potentiaalin ero geoidiin.**normaalipainovoima**

Maata approksimoivan pyörähdySELLIPSOIDIN synnyttämä painovoimakenttä, joka voidaan laskea ellipsoidin parametreista.

**ortometrinen korkeus**

Ortometrinen korkeus voidaan määrittää kaavalla:

$$H_p = \frac{C}{\bar{g}} \quad , \quad (\text{A.4})$$

missä  $C$  on geopotentialiluku ja  $\bar{g}$  on pisteen P ja geoidin välinen keskimääräinen painovoima luotiviivaa pitkin. Kaavan soveltamisen vaikeutena on se, että keskimääräistä painovoimaa  $\bar{g}$  ei voida suoraan mitata vaan se arvioidaan esim. Helmertin kaavalla:

$$\bar{g} = g_p + 0.0424 \cdot H \quad , \quad (\text{A.5})$$

missä  $g_p$  on painovoima Maan pinnalla ja  $H$  pisteen korkeus kilometreissä.**ppb***parts per billion*  
miljardisosa,  $10^{-9}$ .

**ppm***parts per million*miljoonasosa, 1:1 000 000 tai  $10^{-6}$ , esimerkiksi 1 ppm on 1 kilometrin matkalla 1 mm.**RINEX***Receiver INdependent Exchange Format*

Laitteistoriippumaton GNSS-dataformaatti.

**SLR***Satellite Laser Ranging*

Satelliittilaser.

**UTM***Universal Transverse Mercator*

UTM on poikittainen leikkaava lieriöprojektiio. UTM-nimitystä käytetään kansainvälisestä tasokoordinaattijärjestelmästä, jonka mittakaava keskimeridianilla on 0.9996. Globalilla standardisoidulla UTM-projektiolla ja tasokoordinaattijärjestelmällä on seuraavia ominaisuuksia:

1. Projektion sovellusalue on välillä  $80^\circ$  eteläistä leveyttä ja  $84^\circ$  pohjoista leveyttä.
2. 60 kappaletta  $6^\circ$  levyisiä kaistoja alkaen kaistasta  $180^\circ\text{W}$ – $174^\circ\text{W}$  jatkuen itään.
3. Keskimeridianilla mittakaava on 0.9996, josta seuraa, että leikkausviivat sijaitsevat n. 180 km:n päässä keskimeridianilta itään ja länteen.
4. Keskimeridianilla itäkoordinaatin arvo 500 000 m negatiivisten arvojen välttämiseksi.
5. Päiväntasaajalla pohjoiskoordinaatin arvo on 0 m pohjoiselle pallonpuoliskolle ja 10 000 000 m eteläiselle pallonpuoliskolle.
6. UTM-ruudukko koostuu muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta  $6^\circ \times 8^\circ$  lohkoista ja jokaisella loholla on yksilöllinen vyöhyketunnus. (JHS 154; DMA, 1989)

**vertausjärjestelmä**

Joukko suureita, jotka tarvitaan Maan muotoa ja kokoa kuvaavan järjestelmän määrittelemiseksi. Geodeettisen vertausjärjestelmän määrittelemiseen tarvitaan seuraavat neljä suuretta: vertausellipsoidin isoakselin puolikas ( $a$ ), dynaaminen muotokerroin ( $J_2$ ) tai ellipsoidin litistyneisyys ( $f$ ), Maan geosentrinen vetovoimavakio ( $GM$ ) ja pyörähdysliikkeen kulmanopeus ( $\omega$ ).

**vertausellipsoidi**

Maan pinnan muotoa kuvaava matemaattinen pinta. Ellipsoidin koko ja muoto määritellään yleensä isoakselin puolikkaan ( $a$ ) ja litistyssuhteen ( $f$ ) avulla. (JHS 153)

**VLBI***Very Long Baseline Interferometry*

Pitkäkantainterferometria.

**WGS84***World Geodetic System 1984*

GPS-satelliittien käyttämä koordinaattijärjestelmä ja koordinaatisto. WGS84 on Yhdysvaltain puolustushallinnon karttalaitoksen (NIMA, nykyisin NGA, National Geospatial-intelligence Agency) määrittelemä järjestelmä, jonka tarkka määrittely esitetään NIMA:n julkaisussa

TR8530.2. Siinä todetaan mm., että sellaisia alueellisia datumeja, jotka perustuvat tarkasti ITRS:n realisaatioon, kuten EUREF-FIN, voidaan pitää identtisinä WGS84:n kanssa. WGS84-vertausellipsoidi määritellään seuraavien parametrien avulla (NIMA, 2000):

isoakselin puolikas:

$$a = 6378137.0$$

litistyssuhde:

$$f = 1/298.257223563$$

**ykj**

*Yhtenäiskoordinaatisto*

## Liite B. Konversiokaavat

## B1 Maantieteellisten ja tasokoordinaattien väliset kaavat (JHS154)

**Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät**

Kaavoissa käytetään kulmayksikkönä radiaania.

Symboli	Määritelmä
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas
$b$	= ellipsoidin pikkuakselin puolikas
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla
$\varphi$	= maantieteellinen leveys
$\lambda$	= maantieteellinen pituus
$E$	= projektion itäkoordinaatti
$N$	= projektion pohjoiskoordinaatti
$k$	= mittakaavakerroin
$A_1$	= meridiaanin pituisen ympyrän säde
$e^2$	= ensimmäisen epäkeskisyyden neliö
$e'^2$	= toisen epäkeskisyyden neliö
$n$	= toinen litistyssuhde

Hyperboliset ja käänteiset hyperboliset (area-) funktiot:

(Hyperbolisten funktioiden kaavoissa  $e$  = Neperin luku, muutoin  $e$  = ensimmäinen epäkeskisyyden)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arsech}(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$$



**Apusuureet**

$$\begin{aligned}
n &= \frac{f}{2-f} = \frac{a-b}{a+b} \\
A_1 &= \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}\right) \\
e^2 &= 2f - f^2 \\
e'^2 &= \frac{e^2}{1-e^2} \\
h_1 &= \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{37}{96}n^3 - \frac{1}{360}n^4 \\
h_2 &= \frac{1}{48}n^2 + \frac{1}{15}n^3 - \frac{437}{1440}n^4 \\
h_3 &= \frac{17}{480}n^3 - \frac{37}{840}n^4 \\
h_4 &= \frac{4397}{161280}n^4 \\
h_1' &= \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 \\
h_2' &= \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 \\
h_3' &= \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 \\
h_4' &= \frac{49561}{161280}n^4
\end{aligned}$$

## B1.1 Maantieteellisistä koordinaateista ( $\varphi$ , $\lambda$ ) tasokoordinaateiksi (N, E) poikittaiselle lieriöprojektiolle

<b>syöte:</b>	<b>Maantieteelliset koordinaatit</b>
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani (radiaaneina)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)

<b>tulos:</b>	<b>tasokoordinaatit</b>
N	= pohjoiskoordinaatti tasolla
E	= itäkoordinaatti tasolla

Apusuureet ja laskenta:

$$Q' = \operatorname{arsinh}[\tan(\varphi)] \quad (\text{B.1})$$

$$Q'' = \operatorname{artanh}[e \cdot \sin(\varphi)] \quad (\text{B.2})$$

$$Q = Q' - e \cdot Q'' \quad (\text{B.3})$$

$$l = \lambda - \lambda_0 \quad (\text{B.4})$$

$$\beta = \arctan[\sinh(Q)] \quad (\text{B.5})$$

$$\eta' = \operatorname{artanh}[\cos(\beta) \cdot \sin(l)] \quad (\text{B.6})$$

$$\xi' = \arcsin\left[\frac{\sin(\beta)}{\operatorname{sech}(\eta')}\right] \quad (\text{B.7})$$

$$\xi_1 = h_1' \sin(2\xi') \cosh(2\eta') \quad (\text{B.8})$$

$$\xi_2 = h_2' \sin(4\xi') \cosh(4\eta')$$

$$\xi_3 = h_3' \sin(6\xi') \cosh(6\eta')$$

$$\xi_4 = h_4' \sin(8\xi') \cosh(8\eta')$$

$$\eta_1 = h_1' \cos(2\xi') \sinh(2\eta') \quad (\text{B.9})$$

$$\eta_2 = h_2' \cos(4\xi') \sinh(4\eta')$$

$$\eta_3 = h_3' \cos(6\xi') \sinh(6\eta')$$

$$\eta_4 = h_4' \cos(8\xi') \sinh(8\eta')$$

$$\xi = \xi' + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4) \quad (\text{B.10})$$

$$\eta = \eta' + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) \quad (\text{B.11})$$

$$N = A_1 \cdot \xi \cdot k_0 \quad (\text{B.12})$$

$$E = A_1 \cdot \eta \cdot k_0 + E_0 \quad (\text{B.13})$$

## B1.2 Poikittaisen lieriöprojektion tasokoordinaateista (N, E) maantieteellisiksi koordinaatteihin ( $\varphi$ , $\lambda$ )

### syöte:

$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani (radiaaneina)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla
$N$	= pohjoiskoordinaatti
$E$	= itäkoordinaatti

### tulos: maantieteelliset koordinaatit

$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)

Apusuureet ja laskenta:

$$\xi = \frac{N}{A_1 \cdot k_0} \quad (\text{B.14})$$

$$\eta = \frac{E - E_0}{A_1 \cdot k_0} \quad (\text{B.15})$$

$$\xi_1' = h_1 \sin(2\xi) \cosh(2\eta) \quad (\text{B.16})$$

$$\xi_2' = h_2 \sin(4\xi) \cosh(4\eta)$$

$$\xi_3' = h_3 \sin(6\xi) \cosh(6\eta)$$

$$\xi_4' = h_4 \sin(8\xi) \cosh(8\eta)$$

$$\eta_1' = h_1 \cos(2\xi) \sinh(2\eta) \quad (\text{B.17})$$

$$\eta_2' = h_2 \cos(4\xi) \sinh(4\eta)$$

$$\eta_3' = h_3 \cos(6\xi) \sinh(6\eta)$$

$$\eta_4' = h_4 \cos(8\xi) \sinh(8\eta)$$

$$\xi' = \xi - (\xi_1' + \xi_2' + \xi_3' + \xi_4') \quad (\text{B.18})$$

$$\eta' = \eta - (\eta_1' + \eta_2' + \eta_3' + \eta_4') \quad (\text{B.19})$$

$$\beta = \arcsin[\operatorname{sech}(\eta') \cdot \sin(\xi')] \quad (\text{B.20})$$

$$l = \arcsin\left[\frac{\tanh(\eta')}{\cos(\beta)}\right] \quad (\text{B.21})$$

$$Q = \operatorname{arsinh}[\tan(\beta)] \quad (\text{B.22})$$

$$Q' = Q + e \cdot \operatorname{artanh}[e \cdot \tanh(Q)] \quad (\text{B.23})$$

$$Q' = Q + e \cdot \operatorname{artanh}[e \cdot \tanh(Q')] \quad \text{iterointi, kunnes muutos} = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\varphi = \arctan[\sinh(Q')] \quad (\text{B.25})$$

$$\lambda = \lambda_0 + l \quad (\text{B.26})$$

Käytännössä kaavassa (B.24) riittää kolme iteraatiokierrosta. Ensin kaavalla (B.22) laskettu  $Q$  sijoitetaan kaavaan (B.23), jolla saadaan  $Q'$ :n ensimmäinen likiarvo.  $Q'$ :n likiarvo sijoitetaan kaavaan (B.24), jota iteroidaan.

## B2 Maantieteellisten ja suorakulmaisten 3D-koordinaattien väliset kaavat (JHS153)

### Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät

Kaavoissa käytetään kulmayksikkönä radiaania

Symboli	Määritelmä
$e$	= ellipsoidin ensimmäinen eksentrisyys
$N$	= poikkitaaskaarevuussäde
$\varphi_0$	= leveyden ensimmäinen likiarvo

### B2.1 Maantieteelliset koordinaatit suorakulmaisiksi 3D-koordinaateiksi

syöte:	Maantieteelliset koordinaatit
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)
$h$	= korkeus vertausellipsoidista

#### tulos:

$X$	
$Y$	= suorakulmaiset 3D-koordinaatit [m]
$Z$	

Apusuureet ja laskenta:

$$e = (2f - f^2)^{1/2} \quad (\text{B.27})$$

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N + h] \cos \varphi \cos \lambda \\ [N + h] \cos \varphi \sin \lambda \\ [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

## B2.2 Suorakulmaiset 3D-koordinaatit maantieteellisiksi koordinaateiksi

syöte:	Suorakulmaiset 3D-koordinaatit
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde
$X$	
$Y$	= suorakulmaiset 3D-koordinaatit [m]
$Z$	

tulos:	
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)
$h$	= korkeus vertausellipsoidista

Apusuureet ja laskenta:

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (\text{B.30})$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{Z}{(1 - e^2)(X^2 + Y^2)^{1/2}} \quad (\text{B.31})$$

$\varphi$  ja  $h$  ratkaistaan iteroimalla kaavoja B.32-B.34 kunnes  $h_i$  ja  $\varphi_i$  eivät muutu merkittävästi.

$$N_i = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{i-1})^{-1/2} \quad (\text{B.32})$$

$$h_i = \frac{(X^2 + Y^2)^{1/2}}{\cos \varphi_{i-1}} - N_i, \text{ kun } |\varphi_0| < 45^\circ \quad (\text{B.33a})$$

$$h_i = \frac{Z}{\sin \varphi_{i-1}} - (1 - e^2)N_i, \text{ kun } |\varphi_0| \geq 45^\circ \quad (\text{B.33b})$$

$$\varphi_i = \arctan \left[ \frac{Z}{(X^2 + Y^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^2 N_i}{N_i + h_i}} \right] \quad (\text{B.34})$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}, \text{ jos } X > 0, |\lambda| < 90^\circ; \text{ jos } X < 0, |\lambda| > 90^\circ \quad (\text{B.35})$$

### B3 Konversio ETRS-GK27 ja ETRS-TM35FIN tasokoordinaatistojen välillä

Konversio ETRS-GK27 ja ETRS-TM35FIN koordinaatistojen välille voidaan suorittaa seuraavilla kaavoilla:

$$\begin{aligned}
 N_{ETRS-TM35FIN} &= N_{ETRS-GK27} \cdot 0,9996 \\
 E_{ETRS-TM35FIN} &= (E_{ETRS-GK27} - 500000 \text{ m}) \cdot 0,9996 + 500000 \text{ m} \\
 &= E_{ETRS-GK27} \cdot 0,9996 + 200 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{B.36}$$

ja päinvastoin

$$\begin{aligned}
 N_{ETRS-GK27} &= N_{ETRS-TM35FIN} / 0,9996 \\
 E_{ETRS-GK27} &= (E_{ETRS-TM35FIN} - 200 \text{ m}) / 0,9996
 \end{aligned}
 \tag{B.37}$$

missä ( $N_{ETRS-TM35FIN}$ ,  $E_{ETRS-TM35FIN}$ ) ovat ETRS-TM35FIN-koordinaatteja ja ( $N_{ETRS-GK27}$ ,  $E_{ETRS-GK27}$ ) ovat ETRS-GK27-koordinaatteja. On huomattava, että ETRS-GK27 itäkoordinaattien edestä on poistettava kaistan tunnus (keskimeridiaanin asteluku, 27 500 000  $\rightarrow$  500 000). (JHS 154).

## Liite C. Koordinaattimuunnoskaavat ja muunnosparametrien laskenta

Kaikissa muunnoskaavoissa koordinaattiakselien kierrot ovat radiaaneina (rad). Koska kierto-  
kulmat ovat pieniä, ne annetaan useimmiten kuitenkin kaarisekunteinä (arcsec = 1") tai millikaa-  
risekunteinä (mas = 0.001"), joten ne täytyy ensin muuttaa radiaaneiksi. Kaarisekuntien ja radi-  
aanien välinen yhteys voidaan esittää:

kaarisekunnit radiaaneiksi:

$$rad = \frac{arcsec}{3600} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

radiaanit kaarisekunneiksi:

$$arcsec = 3600 \cdot \frac{360}{2\pi} \cdot rad$$

Aste-minuutti-sekunti-muodossa (DD MM SS.ss) olevat koordinaatit voidaan muuntaa radiaa-  
neiksi ja päinvastoin:

DDMMSS-muodosta asteiksi (deg):

$$deg = DD + a \cdot \left( \frac{MM}{60} + \frac{SS.ss}{3600} \right), \text{ missä } a = \begin{cases} 1, & \text{jos } DDMMSS.ss > 0 \\ -1, & \text{jos } DDMMSS.ss < 0 \end{cases}$$

asteista radiaaneiksi:

$$rad = deg \cdot \frac{2\pi}{360}$$

radiaanit asteiksi:

$$deg = rad \cdot \frac{360}{2\pi}$$

asteet DDMMSS-muotoon (int = kokonaislukuosa ilman mahdollista pyöristystä ylöspäin ja abs  
= itseisarvo):

$$DD = \text{int}(deg)$$

$$MM.mm = \text{abs}((deg - \text{int}(deg)) \cdot 60)$$

$$MM = \text{int}(MM.mm)$$

$$SS.ss = (MM.mm - MM) \cdot 60$$

## C1 Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos

### C1.1 Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen muunnoskaavat ja niiden johtaminen

Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen (7-parametrinen Helmert-muunnos) parametreina ovat koordinaatiston kierto kolmen akselin suhteen, origon siirto ja mittakaavan muutos. Muunnoksen johto esitetään seuraavassa.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (1+m)R_3R_2R_1 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

$[\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]^T$  on origon siirto,  $(1+m)$  on koordinaatistojen välinen mittakaavakerroin ja  $R_1$ ,  $R_2$  ja  $R_3$  ovat kiertomatriiseja X-, Y-, ja Z-koordinaattiakselien suhteen.

Merkitään kiertokulmia seuraavasti:  $e_x$  on kierto X-akselin suhteen,  $e_y$  on kierto Y-akselin suhteen ja  $e_z$  on kierto Z-akselin suhteen. Kiertomatriisit ovat:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos e_x & \sin e_x \\ 0 & -\sin e_x & \cos e_x \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos e_y & 0 & -\sin e_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin e_y & 0 & \cos e_y \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad R_3 = \begin{bmatrix} \cos e_z & \sin e_z & 0 \\ -\sin e_z & \cos e_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Kiertokulmat ovat positiivisia myötäpäivään kierrettäessä, kun katsotaan positiivisen akselin suuntaan oikeakätisessä koordinaatistossa. Merkitään kiertomatriisien tuloa  $R = R_3R_2R_1$ :

$$R = \begin{bmatrix} \cos e_z \cos e_y & \sin e_z \cos e_x + \cos e_z \sin e_y \sin e_x & \sin e_z \sin e_x - \cos e_z \sin e_y \cos e_x \\ -\sin e_z \cos e_y & \cos e_z \cos e_x - \sin e_z \sin e_y \sin e_x & \cos e_z \sin e_x + \sin e_z \sin e_y \cos e_x \\ \sin e_y & -\cos e_y \sin e_x & \cos e_y \cos e_x \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Jos tiedetään, että kiertokulmat ovat pieniä (yleensä ovat), voidaan koordinaattimuunnoksissa tehdä seuraava olettaus:

$$\begin{aligned} \sin e_x \sin e_y &\approx \sin e_x \sin e_z \approx \sin e_y \sin e_z \approx 0 \\ \sin \alpha &= \alpha \\ \cos \alpha &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Nyt kiertomatriisi  $R$  voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa:



$$R = \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

Kiertokulmien  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  yksikkö on kaavoissa radiaaneina, jolloin edellä mainittu kaava C.1 voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (1+m) \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Tätä yhdenmuotoisuusmuunnosta kutsutaan Burša-Wolf-muunnokseksi. Siinä muunnos suoritetaan koordinaatiston origon suhteen. Muunnos voidaan tehdä myös pistejoukon painopisteen suhteen (Molodensky-Badekas), mutta sitä ei käsitellä tässä yhteydessä (ks. esim. Kallio, 1998).

## C1.2 Kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen muunnosparametrien ratkaiseminen PNS-tasoituksena (Burša-Wolf)

Tässä yhteydessä esitettävä ratkaisumenetelmä perustuu seuraaviin käytännön yksinkertaistuksiin ja oletuksiin: mittakaavaan muutos ja kiertokulmat ovat pieniä. Painotetaan kaikkia koordinaatteja yhtä paljon ( $P=I$ ) ja oletetaan, että riittävä tarkkuus saavutetaan ilman iterointia. Tällöin mittakaava, kiertokulmat ja siirrot voidaan ratkaista virheyhtälötasoituksena, jossa lähtökoordinaatiston koordinaatteja pidetään vakioina.

Jotta muunnosparametrit voidaan ratkaista, tulee molemmissa koordinaatistossa olla yhteisesti tunnettuja pisteitä vähintään kolme, koska tuntemattomia parametreja on seitsemän. On kuitenkin suositeltavaa käyttää useampaa kuin kolmea pistettä mahdollisten karkeiden koordinaattivirheiden paljastamiseksi. Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (1+m)R \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \text{ missä} \quad (\text{C.7})$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Tasoituksen virheyhtälöt

$$v = Ax - y,$$

voidaan muodostaa pisteittäin:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ e_x \\ e_y \\ e_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

missä linearisoitu A-matriisi yhden pisteen osalta on:

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial m} & \frac{\partial f_i}{\partial e_x} & \frac{\partial f_i}{\partial e_y} & \frac{\partial f_i}{\partial e_z} & \frac{\partial f_i}{\partial \Delta X} & \frac{\partial f_i}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial f_i}{\partial \Delta Z} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

josta saadaan käyttämällä laskettavien parametrien likiarvoja:

$$A_i = \begin{bmatrix} R \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} (1+m) \frac{\partial R}{\partial e_x} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} (1+m) \frac{\partial R}{\partial e_y} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} (1+m) \frac{\partial R}{\partial e_z} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Kun edellinen kirjoitetaan auki saadaan

$$A_i = \begin{bmatrix} (X_1 + e_z Y_1 - e_y Z_1) & 0 & -(1+m)Z_1 & (1+m)Y_1 & 1 & 0 & 0 \\ (-e_z X_1 + Y_1 + e_x Z_1) & (1+m)Z_1 & 0 & -(1+m)X_1 & 0 & 1 & 0 \\ (e_y X_1 - e_x Y_1 + Z_1) & -(1+m)Y_1 & (1+m)X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

$y$ -vektori yhden pisteen osalta on

$$y_i = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} - (1+m)R \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - (1+m)(X_1 + e_z Y_1 - e_y Z_1) - \Delta X \\ Y_2 - (1+m)(-e_z X_1 + Y_1 + e_x Z_1) - \Delta Y \\ Z_2 - (1+m)(e_y X_1 - e_x Y_1 + Z_1) - \Delta Z \end{bmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Pienten kulmien ja mittakaavan tapauksessa hyvät likiarvot ovat:

$$m \approx 0, \quad e_x \approx e_y \approx e_z \approx 0 \quad \Delta X \approx 0, \quad \Delta Y \approx 0, \quad \Delta Z \approx 0.$$

Sijoittamalla ne yo. kaavoihin, yksinkertaistuvat  $A_i$  ja  $y_i$  muotoon:

$$A_i = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 & 1 & 0 & 0 \\ Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 & 0 & 1 & 0 \\ Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja} \quad (\text{C.14})$$

$$y_i = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

Virheyhtälötasoituksessa minimoidaan

$$v^T v = \min$$

Tällöin päädytään normaaliyhtälöihin,

$$(A^T A)\hat{x} = A^T y , \quad (\text{C.16})$$

joiden ratkaisuksi saadaan

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} m \\ e_x \\ e_y \\ e_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y . \quad (\text{C.17})$$

Itseasiassa ratkaisut ovat korjauksia likiarvoihin. Koska likiarvot olivat nollia, yo. pätee. Pienten kulmien tapauksessa iterointia ei tarvita.

Kiertokulmien  $e_x, e_y, e_z$  yksikkö on kaavoissa radiaaneina. Residuaalit saadaan kaavasta:

$$v_i = \begin{bmatrix} (1+m)(X_1 + e_z Y_1 - e_y Z_1) + \Delta X - X_2 \\ (1+m)(-e_z X_1 + Y_1 + e_y Z_1) + \Delta Y - Y_2 \\ (1+m)(e_y X_1 - e_x Y_1 + Z_1) + \Delta Z - Z_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Painoyksikön keskivirhe on:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{3n-7}} , \quad (\text{C.19})$$

missä  $n$  on pisteiden lukumäärä.

## C2 Neliparametrinen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrien määrittäminen virheyhtälötasoituksena (Burša-Wolf)

Alla esitettävässä tasoitusmenetelmässä oletetaan, että painomatriisi on yksikkömatriisi ja toisen koordinaatiston koordinaatteja pidetään vakioina. Jos alaindeksejä on vain yksi, tarkoittaa se aina koordinaatistoa. Jos indeksejä on kaksi, ensimmäinen tarkoittaa koordinaatistoa ja toinen koordinaatin siis pisteen numeroa.

Muunnoksen yleinen muoto:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

eli:

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 - by_1 + c \\ y_2 &= bx_1 + ay_1 + d \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

missä  $a = k \cos \alpha$ ,  $b = k \sin \alpha$ ,  $c = \Delta x$ ,  $d = \Delta y$ ,  $k = (1 + m)$ .

Kirjoitetaan funktionaalinen malli:

$$\begin{aligned} f_{i1} &: ax_{1,i} - by_{1,i} + c - x_{2,i} = 0 \\ f_{i2} &: ay_{1,i} + bx_{1,i} + d - y_{2,i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Kirjoitetaan yhtälö nyt virheyhtälötasoituksen muotoon:

$$A\hat{x} - v = y \quad (\text{C.23})$$

eli:

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & -y_{1,1} & 1 & 0 \\ y_{1,1} & x_{1,1} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,i} & -y_{1,i} & 1 & 0 \\ y_{1,i} & x_{1,i} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{x1,1} \\ v_{y1,1} \\ \vdots \\ v_{x1,i} \\ v_{y1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ y_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

Tällöin normaaliyhtälöt ovat:

$$(A^T A)\hat{x} = A^T y \quad (\text{C.25})$$

josta voidaan nyt ratkaista muunnosparametrit

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (\text{C.26})$$

Residuaalit saadaan:

$$v = A\hat{x} - y \quad (\text{C.27})$$

eli

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= ax_{1,i} - by_{1,i} + c - x_{2,i} \\ v_{y,i} &= ay_{1,i} + bx_{1,i} + d - y_{2,i} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Painoyksikön keskivirhe on:

$$\hat{m}_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{2n - 4}}, \quad (\text{C.29})$$

missä  $n$  on pisteiden lukumäärä.

### C3 Affiinen muunnos

#### C3.1 Affiinisen muunnoksen parametrien määrittäminen

Kirjoitetaan affiinen muunnos muotoon (funktionaalinen malli):

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 y_1 + \Delta x - x_2 &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 y_1 + \Delta y - y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Kirjoitetaan yhtälö nyt virheyhtälötason muotoon  $A\hat{x} - v = y$  ja muodostetaan rakennematriisit  $A$  ja  $y$ :

$$A = \begin{bmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & y_{1,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,m} & y_{1,m} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{1,m} & y_{1,m} & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ y_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,m} \\ y_{2,m} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Tällöin normaaliyhtälöt ovat:

$$(A^T A)\hat{x} = A^T y, \quad (\text{C.32})$$

josta voidaan ratkaista muunnosparametrit vanhaan tapaan:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \Delta x \\ b_1 \\ b_2 \\ \Delta y \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y. \quad (\text{C.33})$$

Toisaalta huomataan helposti, että  $(A^T A)$  sisältää kaksi täysin identtistä blokkia, jolloin normaaliyhtälöt kannattaakin järjestää seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 y_1 & \sum x_1 \\ \sum x_1 y_1 & \sum y_1^2 & \sum y_1 \\ \sum x_1 & \sum y_1 & \sum z_{1,1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \Delta x & \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_1 x_2 & \sum y_1 x_2 \\ \sum y_1 x_2 & \sum y_1 y_2 \\ \sum x_2 & \sum y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

josta muunnosparametrit voidaan ratkaista:

$$\begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 y_1 & \sum x_1 \\ \sum x_1 y_1 & \sum y_1^2 & \sum y_1 \\ \sum x_1 & \sum y_1 & \sum z_1^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum x_1 x_2 & \sum y_1 x_2 \\ \sum y_1 x_2 & \sum y_1 y_2 \\ \sum x_2 & \sum y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \Delta x & \Delta y \end{bmatrix} \quad (\text{C.35})$$

Residuaalit saadaan:

$$v = A\hat{x} - y \quad (\text{C.36})$$

eli

$$\begin{aligned} v_x &= a_1 x_1 + a_2 y_1 + \Delta x - x_2 \\ v_y &= b_1 x_1 + b_2 y_1 + \Delta y - y_2 \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Painoyksikön keskivirhe saadaan kaavalla:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{2n - 6}} \quad (\text{C.38})$$

missä  $n$  on pisteiden lukumäärä.



### C3.2 Muunnoskolmion etsintä kolmioverkosta affiinisen kolmioittaisen muunnoksen tapauksessa

Tässä esitellään kaksi mahdollista tapaa etsiä kolmioverkosta se kolmio, jossa muunnettava piste sijaitsee. Lisää tapoja löytyy kirjallisuudesta ja menetelmän valinta riippuu lähinnä käyttötarkoituksesta ja tehokkuusvaatimuksista.

Kolmioihin perustuvassa affiinisessa muunnoksessa oikean muunnoskolmion hakeminen voidaan toteuttaa esimerkiksi tarkistamalla kolmioittain onko piste sen sisä- vai ulkopuolella. Testaamme siis onko muunnettava piste  $P(x_p, y_p)$  sen kolmion sisällä, jonka kulmapisteet ovat  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  ja  $C(x_c, y_c)$ .

#### Ristitulomenetelmä

Merkitään yleisesti vektoria  $u = ai + bj + ck$ , missä  $i, j$  ja  $k$  ovat koordinaattiakselien  $x, y$  ja  $z$  suuntaisia yksikkövektoreita. Muodostetaan muunnettavan pisteen  $P$  ja kolmion kärkipisteiden  $A, B$  ja  $C$  välille vektorit  $PA, PB$  ja  $PC$  laskemalla koordinaateista:

$$\begin{aligned} PA &= (x_p - x_a)i + (y_p - y_a)j + 0k = \Delta x_a i + \Delta y_a j + 0k \\ PB &= (x_p - x_b)i + (y_p - y_b)j + 0k = \Delta x_b i + \Delta y_b j + 0k \quad , \\ PC &= (x_p - x_c)i + (y_p - y_c)j + 0k = \Delta x_c i + \Delta y_c j + 0k \end{aligned}$$

missä alaindeksit  $a, b$  ja  $c$  viittaavat kolmion kärkipisteeseen ja  $p$  muunnettavaan pisteeseen. Lasketaan ristitulot  $PA \times PB, PB \times PC$  ja  $PC \times PA$  determinanttien avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} PA \times PB &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \Delta x_a & \Delta y_a & 0 \\ \Delta x_b & \Delta y_b & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \Delta y_a & 0 \\ \Delta y_b & 0 \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \Delta x_a & 0 \\ \Delta x_b & 0 \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \Delta x_a & \Delta y_a \\ \Delta x_b & \Delta y_b \end{bmatrix} k \\ &= \det \begin{bmatrix} \Delta x_a & \Delta y_a \\ \Delta x_b & \Delta y_b \end{bmatrix} k \\ PB \times PC &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \Delta x_b & \Delta y_b & 0 \\ \Delta x_c & \Delta y_c & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \Delta y_b & 0 \\ \Delta y_c & 0 \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \Delta x_b & 0 \\ \Delta x_c & 0 \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \Delta x_b & \Delta y_b \\ \Delta x_c & \Delta y_c \end{bmatrix} k \\ &= \det \begin{bmatrix} \Delta x_b & \Delta y_b \\ \Delta x_c & \Delta y_c \end{bmatrix} k \\ PC \times PA &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \Delta x_c & \Delta y_c & 0 \\ \Delta x_a & \Delta y_a & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \Delta y_c & 0 \\ \Delta y_a & 0 \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \Delta x_c & 0 \\ \Delta x_a & 0 \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \Delta x_c & \Delta y_c \\ \Delta x_a & \Delta y_a \end{bmatrix} k \\ &= \det \begin{bmatrix} \Delta x_c & \Delta y_c \\ \Delta x_a & \Delta y_a \end{bmatrix} k \end{aligned}$$

Tutkimme ristitulojen  $PA \times PB$ ,  $PB \times PC$  ja  $PC \times PA$  suuntaa vertaamalla millä luvulla yksikkövektori  $k$  kerrotaan.

$$\det \begin{bmatrix} \Delta x_a & \Delta y_a \\ \Delta x_b & \Delta y_b \end{bmatrix} = \Delta x_a \Delta y_b - \Delta y_a \Delta x_b = (x_p - x_a)(y_p - y_b) - (y_p - y_a)(x_p - x_b)$$

$$\det \begin{bmatrix} \Delta x_b & \Delta y_b \\ \Delta x_c & \Delta y_c \end{bmatrix} = \Delta x_b \Delta y_c - \Delta y_b \Delta x_c = (x_p - x_b)(y_p - y_c) - (y_p - y_b)(x_p - x_c)$$

$$\det \begin{bmatrix} \Delta x_c & \Delta y_c \\ \Delta x_a & \Delta y_a \end{bmatrix} = \Delta x_c \Delta y_a - \Delta y_c \Delta x_a = (x_p - x_c)(y_p - y_a) - (y_p - y_c)(x_p - x_a)$$

Kun kaikki kolme ovat samanmerkkisiä (joko positiivisia tai negatiivisia) on muunnettava piste kolmion sisäpuolella. Jos yksi luvuista on nolla, sijaitsee määritettävä piste kolmion sivussa. Jos kaksi luvuista on nollia, sijaitsee määritettävä piste kolmion kärkipisteessä. Kaikissa muissa tapauksissa määritettävä piste on kolmion ulkopuolella.

### Barysentristen koordinaattien avulla

Merkitään muunnettavan pisteen  $P$  koordinaatit  $(x_p, y_p)$  seuraavasti:

$$x_p = p^A x_a + p^B x_b + p^C x_c \quad \text{ja} \quad y_p = p^A y_a + p^B y_b + p^C y_c$$

Painot  $p^A$ ,  $p^B$  ja  $p^C$ , joita kutsutaan barysentrisiksi koordinaateiksi, voidaan laskea determinanttien avulla (ks. mm. Vermeer et al., 2004):

$$p^A = \frac{\det \begin{bmatrix} x_b & x_c & x_p \\ y_b & y_c & y_p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}, \quad p^B = \frac{\det \begin{bmatrix} x_c & x_a & x_p \\ y_c & y_a & y_p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}, \quad p^C = \frac{\det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_p \\ y_a & y_b & y_p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Jos kaikki barysentiset koordinaatit  $p^i$  ( $i=A,B,C$ ) ovat välillä  $0 \dots 1$ , on muunnettava piste kolmion sisällä. Jos yksi koordinaateista  $p^i$  on nolla, on määritettävä piste kolmion sivulla. Jos kaksi koordinaateista  $p^i$  ovat nollia on piste kolmion kärkipisteessä, jolloin kolmas koordinaatti on 1.

## Liite D. Esimerkit

Esimerkit on laskettu Matlab-ohjelmalla apuvälineeksi muunnosten ohjelmoijille. Kaavat laskuesimerkeissä laskettuihin esimerkkeihin löytyvät liitteistä B ja C. Välivaiheiden numeroarvot annetaan tarvittavalla numeerisella tarkkuudella, joskin Matlab-laskennassa on ollut käytössä enemmän desimaaleja. Tuloksissa ja välivaiheissa merkitsevien numeroiden määrä on sovitettu niin, että ne riittävät esitetyn tarkkuuden saavuttamiseksi. Näin ollen lisädesimaaleista ei ole hyötyä lopputulosta ajatellen. Jos viimeiset desimaalit poikkeavat, voi se johtua eri numeerisella tarkkuudella laskevista ohjelmista. Esimerkeissä välivaiheiden lähtöarvoiksi on otettu edellisen esimerkin arvosta useimmiten yksi desimaali enemmän kuin millä muunnosketjun lopputulos esitetään.

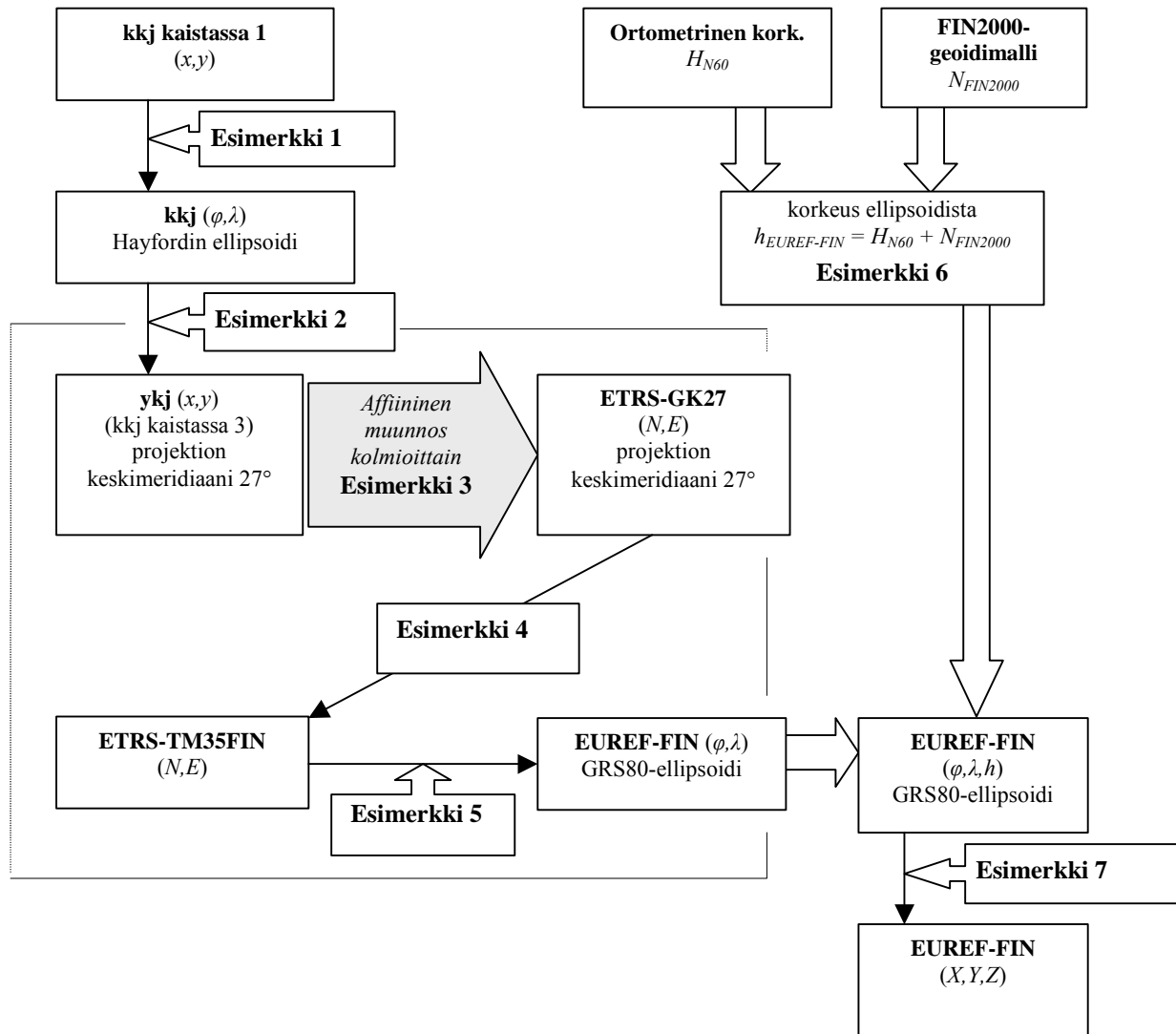
Esimerkeissä 1–14 muunnetaan vaihe vaiheelta kkj1-koordinaateista (kkj kaistassa 1) EUREF-FIN-koordinaateiksi (kolmiulotteisiksi suorakulmaisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi) ja takaisin. Tässä muunnosketju menee esimerkinomaisesti ykj-koordinaateista ETRS-GK27:n kautta ETRS-TM35FIN:iin vaikka muunnos olisi voitu tehdä tässä poikkeustapauksessa ilman välivaiheita. Esimerkin 14 tulos muunnosketjun jälkeen poikkeaa lähtökoordinaateista 0.1 mm, tosin lähtökoordinaattien kolmen desimaalin tarkkuudella lopputulos on sama. Muutoinkin lopputulos tulisi antaa aina vain korkeintaan samalla tarkkuudella kuin lähtöarvot ovat olleet. Vähäinen ero lopputulokseen tulee pyöristyksistä, Matlabin laskentatarkkuudesta ja konversiokaavojen sarjakehittelystä.

Esimerkissä 3 lasketaan affiinisen muunnoksen parametrit kolmiossa ja muunnetaan pisteen koordinaatit affiinisella muunnoksella. Lisäksi esimerkissä 3c käytetään bilineaarista interpolointia kolmioittaisen affiinisen muunnoksen tapauksessa. Koordinaattimuunnos (esimerkit 3 ja 12) on tehty identtisillä pisteillä, joten siitä ei tule esimerkkiin virhettä mentäessä edestakaisin. Kuitenkin todellisuudessa koordinaattimuunnokseen liittyy aina muunnosvirhe, joka tulee näkyviin muunnettaessa koordinaatteja koordinaatistosta toiseen yhteen suuntaan (ei siis edestakaisin). Kolmioittaisella affiinisella muunnoksella koko Suomen alueella keskimääräinen muunnosvirhe (rms) on noin 2 cm ( $N,E$ ), suurimpien virheiden ollessa hieman yli 10 cm.

Esimerkeissä 15–17 on muunnettu suorakulmaiset EUREF-FIN-koordinaatit valtakunnallisen kolmiulotteisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen ja muutaman konversion avulla kkj-tasokoordinaatistoon (kaistassa 1). Esimerkeistä nähdään, että kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnoksen käytöstä aiheutuu lopputulokseen yli metrin muunnosvirhe verrattuna tarkempaan kolmioittaiseen affiiniseen muunnokseen.

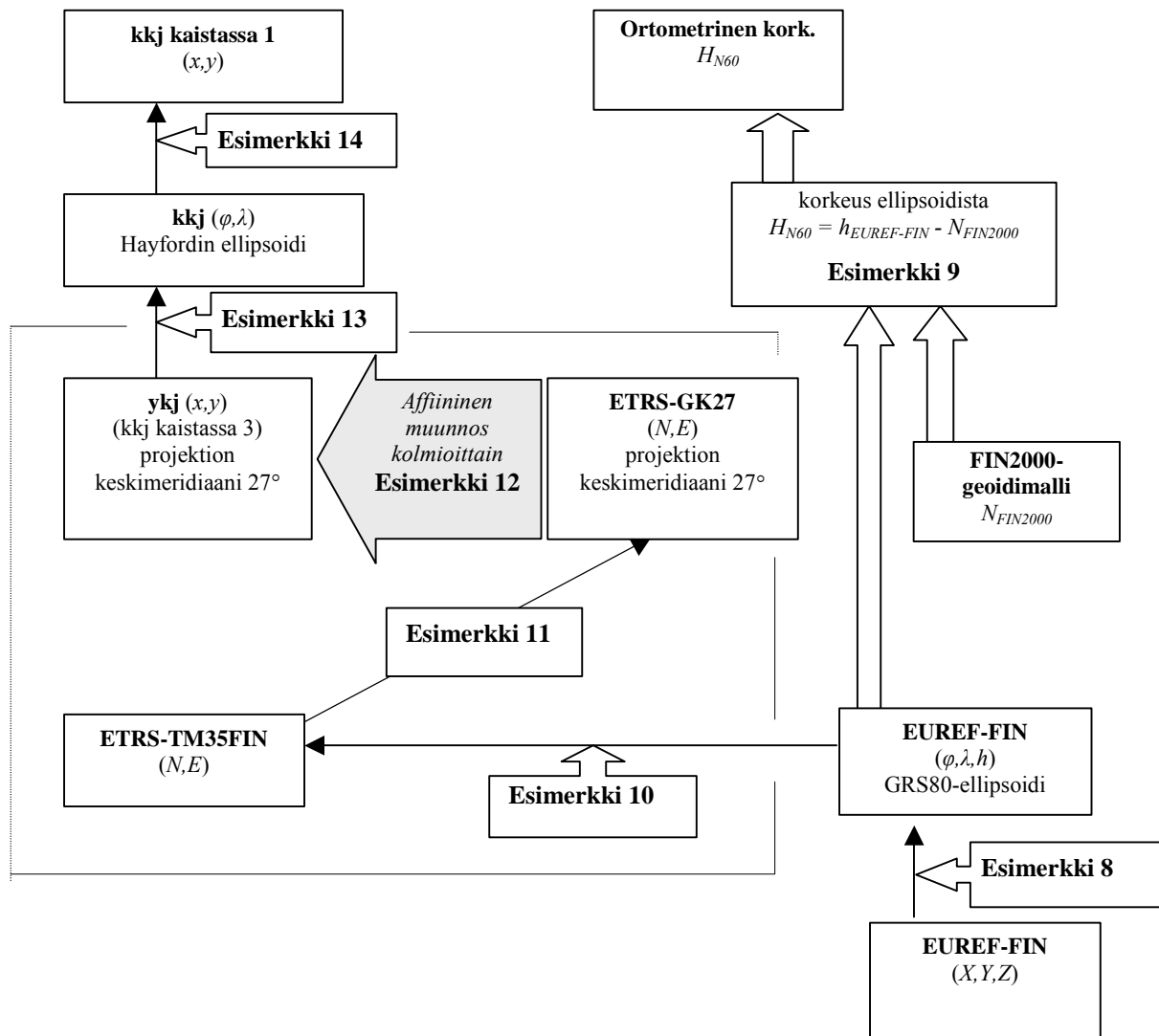
Esimerkissä 18 on laskettu muunnosparametrit neliparametriseen yhdenmuotoisuusmuunnokseen.

## Laskuesimerkkikaaviot

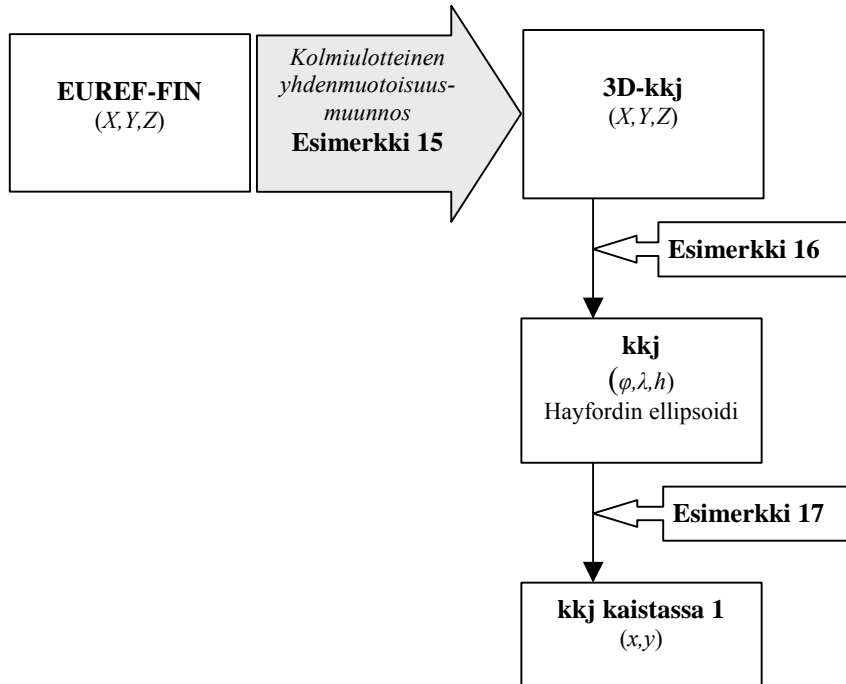
kkj  $\rightarrow$  EUREF-FIN

**Kaavio 7.** Laskuesimerkkiketju kkj-koordinaattien muuntamiseksi EUREF-FIN-koordinaatteihin kolmioittaisella affiinisella muunnoksella.

**EUREF-FIN → kkj**



**Kaavio 8.** Laskuesimerkkiketju EUREF-FIN-koordinaattien muuntamiseksi kkj-koordinaatteihin kolmioittaisella affinisella muunnoksella.

**Likimääräinen muunnos EUREF-FIN  $\rightarrow$  kkj**

**Kaavio 9.** EUREF-FIN-koordinaattien muuttaminen kkj-koordinaateiksi likimääräisellä kolmiulotteisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella.

## Laskuesimerkki 1. kkj tasokoordinaattien (1. kaista) konvertoiminen maantieteellisiksi koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>kkj tasokoordinaatit (1. kaista)</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas (Hayford)	= 6378388 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde (Hayford)	= 1/297
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla (Gauss-Krüger)	= 1.0
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani (radiaaneina) (1. kaista)	= 0.366519142918809 (21° <sup>*)</sup> )
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (1. kaista)	= 1 500 000 m
$y$	= itäkoordinaatti (kkj1-koordinaatti)	= 1516297.434 m
$x$	= pohjoiskoordinaatti (kkj1-koordinaatti)	= 7006531.781 m

<sup>\*)</sup> keskimeridiaani muunnettu liitteessä C esitetyillä kaavoilla radiaaneiksi

### Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001686340640809
$A_1$	=	6367654.50005758
$e^2$	=	0.006722670022333
$h_1$	=	0.000841276338819
$h_2$	=	0.000000059561930
$h_3$	=	0.000000000169485
$h_4$	=	0.000000000000220
$\xi$	=	1.100331649736436
$\eta$	=	0.002559409276972
$\xi_1'$	=	0.000679849257357
$\xi_2'$	=	-0.000000056706461
$\xi_3'$	=	0.000000000053128
$\xi_4'$	=	0.000000000000129
$\eta_1'$	=	-0.000002536606354
$\eta_2'$	=	-0.000000000186637
$\eta_3'$	=	0.000000000002472
$\eta_4'$	=	-0.000000000000004
$\xi'$	=	1.099651857132284

$$\eta' = 0.002561946067494$$

$$\beta = 1.099645414823392$$

$$l = 0.005644163384381$$

$$Q = 1.426982069340725$$

$$Q' = 1.432982972663204$$

$$Q' = 1.432991284714954$$

$$Q' = 1.432991296166745$$

$$Q' = 1.432991296182523$$

$$Q' = 1.432991296182544$$

iterointia

<b>tulos:</b>	<b>maantieteelliset kkj-koordinaatit</b>	<b>asteina</b>
$\varphi$	= 1.102365782636 (rad)	= 63° 9' 39.26457''
$\lambda$	= 0.372163306303 (rad)	= 21° 19' 24.19227''



## Laskuesimerkki 2. Maantieteellisten kkj-koordinaattien konvertoiminen tasolle ykj-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>maantieteelliset kkj-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas ( <i>Hayford</i> )	= 6378388 m
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde ( <i>Hayford</i> )	= 1/297
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 1
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani (radiaaneina) ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 0.471238898038469 (27°)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (3. kaista)	= 3 500 000 m
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)	= 1.102365782636
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)	= 0.372163306303

Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001686340640809
$A_1$	=	6367654.50005758
$e^2$	=	0.006722670022333
$h_1'$	=	0.000841275991010
$h_2'$	=	0.000000767306686
$h_3'$	=	0.000000001212912
$h_4'$	=	0.000000000002485
$Q'$	=	1.432991296182681
$Q''$	=	0.073290502796764
$Q$	=	1.426982069340861
$l$	=	-0.099075591735469
$\beta$	=	1.099645414823454
$\eta'$	=	-0.044928278441239
$\xi'$	=	1.101630863418152
$\xi_1$	=	0.000681291362446
$\xi_2$	=	-0.000000743540953
$\xi_3$	=	0.000000000403356
$\xi_4$	=	0.000000000001520
$\eta_1$	=	0.000044746520609
$\eta_2$	=	0.000000041746647
$\eta_3$	=	-0.000000000313445

$$\eta_4 = 0.000000000000747$$

$$\xi = 1.102311411644522$$

$$\eta = -0.044883490486680$$

**tulos: ykj-tasokoordinaatit**

---

$x$	=	7019138.2208	=	7019138.221 m
$y$	=	3214197.4398	=	3214197.440 m

---

## Laskuesimerkki 3. Affiinen muunnos kolmioittain

**syöte: pisteen ykj-koordinaatit**

---


$$\begin{aligned} x &= 7019138.2208 \\ y &= 3214197.4398 \end{aligned}$$


---

Pisteet 254, 429 ja 541 määrittävät kolmion, jonka sisällä piste sijaitsee.

Pisteiden ykj- ja ETRS-GK27-koordinaatit ovat:

Piste	$x$ (ykj)	$y$ (ykj)	$N$ (ETRS-GK27)	$E$ (ETRS-GK27)
254	7041300.513	3215140.599	7041166.051	214970.055
429	6994980.153	3235047.964	6994845.826	234877.727
541	7008897.930	3200995.421	7008763.356	200825.067

Lasketaan affiinisen muunnoksen parametrit vastinpisteiden avulla.

## Laskuesimerkki 3a. Affiinisen muunnoksen muunnosparametrien laskenta

Laskentakaavat liitteessä C3.1.

Muodostetaan  $A$ -matriisi ja  $y$ -vektori:

$$A = \begin{bmatrix} 7041300.513 & 3215140.599 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7041300.513 & 3215140.599 & 1 \\ 6994980.153 & 3235047.964 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6994980.153 & 3235047.964 & 1 \\ 7008897.930 & 3200995.421 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7008897.930 & 3200995.421 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 7041166.051 \\ 214970.055 \\ 6994845.826 \\ 234877.727 \\ 7008763.356 \\ 200825.067 \end{bmatrix}$$

Nyt voidaan laskea muunnosparametrit:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \Delta x \\ b_1 \\ b_2 \\ \Delta y \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y = \begin{bmatrix} 1.000000246134533 \\ 0.000007354093782 \\ -159.839511 \\ -0.000006248716044 \\ 1.000000881933350 \\ -3000129.380451 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000000246135 \\ 0.000007354094 \\ -159.8395 \\ -0.000006248716 \\ 1.000000881933 \\ -3000129.3805 \end{bmatrix}$$

Koska pisteitä on vain kolme, painoyksikön keskivirhettä tai residuaaleja ei voida laskea. Muunnoksessa käytettävillä pisteillä ei siis ole minkäänlaista kontrollia ja suuretkin karkeat virheet jäävät löytymättä. Mikäli muunnoksen tarkkuudeksi halutaan millimetrin kymmenys, tulisi muunnosparametrit (erityisesti  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  ja  $b_2$ ) ilmoittaa vähintään 12 tai jopa 15 desimaalin tarkkuudella. Origon siirtoparametreissa ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) riittää neljä tai viisi desimaalia.

### Laskuesimerkki 3b. Affiininen muunnos

Muunnetaan nyt muunnettavan pisteen pyöristetyt ykj-koordinaatit ETRS-GK27-koordinaatistoon lasketuilla pyöristetyillä parametreilla (kaava 5.7):

$$\begin{aligned} N &= 1.000000246135 \cdot 7019138.221 + 0.000007354094 \cdot 3214197.440 - 159.8395 \\ &= 7019003.7467 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= -0.000006248716 \cdot 7019138.221 + 1.000000881933 \cdot 3214197.440 - 3000129.3805 \\ &= 214027.0336 \end{aligned}$$

Mikäli laskennan suorittaa tarkoilla koordinaateilla ja tarkoilla parametreilla (desimaaleja enemmän kuin edellä):

<b>tulos:</b>	<b>ETRS-GK27-tasokoordinaatit</b>	
$N$	= 7019003.7465	= 7019003.747
$E$	= 214027.0335 (=27214027.0335)	= 27214027.034

Huomaa, että ETRS-GK27-koordinaatteihin on laskennan jälkeen lisätty JHS154:n suosittama kaistatunnus 27 (keskimeridiaanin asteluku).

### Laskuesimerkki 3c. Bilineaarisen interpoloinnin hyödyntäminen kolmioittaisessa affinisessä muunnoksessa

Jos bilineaarista interpolointia haluaa hyödyntää esimerkiksi muunnoksessa ykj  $\rightarrow$  ETRS-GK27, tehdään se seuraavien vaiheiden mukaisesti (ks. kappaleet 5.4.4 ja 5.4.5):

<b>syöte:</b>	<b>pisteen ykj-koordinaatit</b>	
$x$	= 7019138.2208	
$y$	= 3214197.4398	

1. Muodostetaan (1 km x 1km) hila ykj-koordinaatistoon alueelle, jossa piste sijaitsee. Esimerkkihila on vain yksi ruutu ja hilan nurkkapisteiden koordinaatit ykj-koordinaatistossa ovat:

nro	$x$ (ykj)	$y$ (ykj)
1	7019000	3214000
2	7020000	3214000
3	7020000	3215000
4	7019000	3215000

2. Lasketaan hilan jokaiselle pisteelle muunnetut koordinaatit kolmioittaisella affiinisella muunnoksella ETRS-GK27-koordinaatistoon.

Hilan kaikkien nurkkapisteiden koordinaatit osuvat kolmioon joka rajoittuu pisteisiin 254, 429, 541. Affiinisestä muunnoksesta parametrit kyseisessä kolmiossa on laskettu esimerkissä 3a. Mikäli joku nurkkapiste osuisi toiseen kolmioon, laskettaisiin sen koordinaatit kyseisen kolmion parametreilla.

Lasketaan affiinisella muunnoksella nurkkapisteille ETRS-GK27-koordinaatit

nro	$x$ (ykj)	$y$ (ykj)	$N$ (ETRS-GK27)	$E$ (ETRS-GK27)
1	7019000	3214000	7018865.5242	213829.5943
2	7020000	3214000	7019865.5244	213829.5881
3	7020000	3215000	7019865.5318	214829.5890
4	7019000	3215000	7018865.5315	214829.5952

Lasketaan myös apuparametrit

$$a = \frac{E_p - E_1}{E_4 - E_1} = \frac{3214197.4398 - 3214000}{3215000 - 3214000} = \frac{197.4398}{1000} = 0.1974398$$

$$b = \frac{N_p - N_1}{N_3 - N_1} = \frac{7019138.2208 - 7019000}{7020000 - 7019000} = \frac{138.2208}{1000} = 0.1382208$$

3. Lasketaan hilan jokaisessa pisteessä koordinaattierot koordinaatistojen välillä:

$$\Delta N = N_{ETRS-GK27} - x_{ykj}$$

$$\Delta E = E_{ETRS-GK27} - y_{ykj}$$

missä  $N_{ETRS-GK27}$  ja  $E_{ETRS-GK27}$  ovat muunnetut ETRS-GK27-koordinaatit ja  $x_{ykj}$ ,  $y_{ykj}$  ovat hilan ykj-koordinaatit.

Koordinaattierot hilan pisteissä

nro	$\Delta N$	$\Delta E$
1	-134.4758	-3000170.4057
2	-134.4756	-3000170.4119
3	-134.4682	-3000170.4110
4	-134.4685	-3000170.4048

4. Laskettujen koordinaattierojen avulla voidaan nyt hilassa bilineaarisesti interpoloida haluttuun pisteeseen koordinaattierot  $\Delta N_p$ ,  $\Delta E_p$  (Kuva 33). Koordinaattierot ovat nyt siis suureita, joita bilineaarisesti interpoloidaan. Bilineaarinen interpolointi on suoritettava molemmille koordinaateille erikseen.

$$\begin{aligned}\Delta N_p &= a \cdot b \cdot \Delta N_3 + a \cdot (1-b) \cdot \Delta N_4 + (1-a) \cdot b \cdot \Delta N_2 + (1-a) \cdot (1-b) \cdot \Delta N_1 \\ &= -134.4743 \\ \Delta E_p &= a \cdot b \cdot \Delta E_3 + a \cdot (1-b) \cdot \Delta E_4 + (1-a) \cdot b \cdot \Delta E_2 + (1-a) \cdot (1-b) \cdot \Delta E_1 \\ &= -3000170.4064\end{aligned}$$

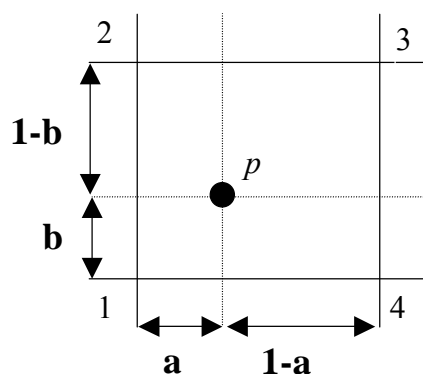
5. Muunnetut koordinaatit ETRS-GK27-koordinaatistossa saadaan koordinaattierojen avulla:

$$\begin{aligned}N_{ETRS-GK27} &= x_{y_{kj}} + \Delta N_p = 7019138.2208 - 134.4743 = 7019003.7465 \\ E_{ETRS-GK27} &= y_{y_{kj}} + \Delta E_p = 3214197.4398 - 3000170.4064 = 214027.0334\end{aligned}$$

**tulos: pisteen interpoloidut ETRS-GK27-tasokoordinaatit**

$N$	= 7019003.7465	= 7019003.747
$E$	= 214027.0334 (= 27214027.0334)	= 27214027.033

Interpoloidut koordinaatit ovat hyvin lähellä kolmioittaisella affiinisella muunnoksella laskettuja koordinaatteja. Mikäli hilan pisteitä osuu eri kolmioihin, aiheutuu tästä luonnollisesti pientä eroavaisuutta kolmioittaisen affiinisien muunnoksen tuloksiin.



**Kuva 33.** Bilineaarinen interpolointi tasavälisessä hilassa. Nurkkapisteen tunnettujen arvojen  $z_i$  avulla interpoloidaan pisteelle  $p$  arvo  $z_p$ .

## Laskuesimerkki 4. ETRS-GK27-koordinaattien konvertoiminen ETRS-TM35FIN-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B3.

**syöte: ETRS-GK27-koordinaatit (kolmioittaisesta affiinisesta muunnoksesta)**

$$N = 7019003.7465$$

$$E = 214027.0335 \quad (= 27214027.0335)$$

$$N_{ETRS-TM35FIN} = 7019003.7465 \cdot 0.9996 = 7016196.1450$$

$$E_{ETRS-TM35FIN} = 214027.0335 \cdot 0.9996 + 200 = 214141.4227$$

**tulos: ETRS-TM35FIN-koordinaatit**

$$N = 7016196.1450 = 7016196.145$$

$$E = 214141.4227 = 214141.423$$

## Laskuesimerkki 5. ETRS-TM35-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>ETRS-TM35FIN-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas (GRS80)	= 6 378 137 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde (GRS80)	= 1/298.257222101
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla (UTM)	= 0.9996
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani (radiaaneina) (TM35)	= 0.471238898038469 (27°)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (UTM)	= 500 000
$E$	= projektion itäkoordinaatti (ETRS-TM35FIN)	= 7016196.1450 m
$N$	= projektion pohjoiskoordinaatti (ETRS-TM35FIN)	= 214141.4227 m

### Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001679220394629
$A_1$	=	6367449.14577105
$e^2$	=	0.006694380022901
$h_1$	=	0.000837732168164
$h_2$	=	0.000000059058696
$h_3$	=	0.000000000167349
$h_4$	=	0.000000000000217
$\xi$	=	1.102325842862880
$\eta$	=	-0.044911700107809
$\xi_1'$	=	0.000677727690141
$\xi_2'$	=	-0.000000057278817
$\xi_3'$	=	0.000000000056335
$\xi_4'$	=	0.000000000000132
$\eta_1'$	=	0.000044625973871
$\eta_2'$	=	0.000000003183703
$\eta_3'$	=	-0.000000000043169
$\eta_4'$	=	0.000000000000065
$\xi'$	=	1.101648172395089
$\eta'$	=	-0.044956329222279



$$\beta = 1.099660165745797$$

$$l = -0.099140449258980$$

$$Q = 1.427014567121504$$

$$Q' = 1.432990217860975 \quad \text{iterointia}$$

$$Q' = 1.432998459625033$$

$$Q' = 1.432998470931802$$

$$Q' = 1.432998470947313$$

$$Q' = 1.432998470947335$$

<b>tulos:</b>	<b>(maantieteelliset EUREF-FIN-koord.)</b>	<b>asteina</b>
$\varphi$	= 1.102369021935 (rad)	= 63° 9' 39.93272''
$\lambda$	= 0.372098448779 (rad)	= 21° 19' 10.81444''

## Laskuesimerkki 6. Korkeus vertausellipsoidista

Laskentakaavat kappaleessa 4.3.

**syöte:**                    **ortometrinen korkeus, geoidin korkeus**

---

$H_{N60}$	=	ortometrinen korkeus	=	6.387 m
$N_{FIN2000}$	=	geoidin korkeus (FIN2000)	=	18.395 m

---

$$h_{EUREF-FIN} = H_{N60} + N_{FIN2000} = 24.782 \text{ m}$$

**tulos:**                    **EUREF-FIN-korkeus vertausellipsoidista (GRS80)**

---


$$h_{EUREF-FIN} = 24.782 \text{ m} (= 24.78 \text{ m})^{*})$$


---

<sup>\*)</sup> geoidimallin tarkkuus (rms) keskimäärin noin 3 cm (max n. 8–9 cm), joten mallia käytettäessä varauduttava noin desimetrin tarkkuuksiin

Laskuesimerkki 7. Maantieteellisten EUREF-FIN-koordinaattien konvertoiminen suorakulmaisiksi kolmiulotteisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi.

Laskentakaavat liitteessä B2.1.

<b>syöte:</b>	<b>maantieteelliset EUREF-FIN-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas (GRS80)	= 6 378 137 m
$f$	= ellipsoidin litistyssuhde (GRS80)	= 1/298.257222101
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)	= 1.102369021934
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)	= 0.372098448779
$h$	= EUREF-FIN-korkeus (GRS80-ellipsoidista)	= 24.782 m
	Apusuureet ja laskennan eteneminen	
$e$	= 0.081819191042815	
$N$	= 6395202.39193645	
<b>tulos:</b>	<b>EUREF-FIN-koordinaatit</b>	
$X$	= 2689749.0490	
$Y$	= 1049753.2861	
$Z$	= 5668129.5131	

## Laskuesimerkki 8. Kolmiulotteisten suorakulmaisten EUREF-FIN-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi EUREF-FIN-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B2.2.

<b>syöte:</b>	<b>Kolmiulotteiset EUREF-FIN-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas (GRS80)	= 6 378 137 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde (GRS80)	= 1/298.257222101
$X$	= 2689749.0490	
$Y$	= 1049753.2861	
$Z$	= 5668129.5131	
<hr/>		
	Apusuuret ja laskennan eteneminen	
$e^2$	= 0.006694380022901	
$\varphi_0$	= 1.102369032457610	
$N_1$	= 6395202.39211883	iterointia *)
$h_1$	= 24.7480	
$\varphi_1$	= 1.102369021951191	
$N_2$	= 6395202.39193675	
$h_2$	= 24.7820	
$\varphi_2$	= 1.102369021936777	
$N_3$	= 6395202.39193650	
$h_3$	= 24.7820	
$\varphi_3$	= 1.102369021936758	
$N_4$	= 6395202.39193650	
$h_4$	= 24.7820	
$\varphi_4$	= 1.102369021936758	
<hr/>		
<b>tulos:</b>	<b>maantieteelliset EUREF-FIN-koord.</b>	<b>asteina</b>
$\varphi$	= 1.102369021937	= 63° 9' 39.93272''
$\lambda$	= 0.372098448787	= 21° 19' 10.81444''
$h$	= 24.7820	= 24.782 m

\*) neljä kierrosta iterointia antaa tuloksen riittävällä tarkkuudella, muutos edelliseen kierrokseen:  $dh_i < 10^{-4}$  ja  $d\varphi_i < 10^{-15}$

Ero koordinaateissa edestakaisin mennessä, vrt. esim. 7 (kun XYZ on annettu 4:llä desimaalilla) on noin  $\varphi=3 \cdot 10^{-12}$  rad  $\approx 0.018$  mm ja  $\lambda=7 \cdot 10^{-12}$  rad  $\approx 0.021$  mm eli mitätön.

## Laskuesimerkki 9. Ortometrinen korkeus

Laskentakaavat kappaleessa 4.3.

**syöte:**                    **ortometrinen korkeus, geoidin korkeus**

---


$$h_{EUREF-FIN} = 24.782 \text{ m}$$

$$N_{FIN2000} = 18.395 \text{ m}$$


---

$$H_{N60} = h_{EUREF-FIN} - N_{FIN2000}$$

**tulos:**                    **N<sub>60</sub>-korkeus**

---


$$H_{N60} = 6.387 \text{ m} \qquad \approx 6.39 \text{ m}^{*})$$


---

<sup>\*)</sup> geoidimallin tarkkuus (rms) keskimäärin noin 3 cm (max n. 8–9 cm), joten mallia käytettäessä varauduttava noin desimetrin tarkkuuksiin

## Laskuesimerkki 10. Maantieteellisten EUREF-FIN-koordinaattien konvertoiminen ETRS-TM35FIN-tasokoordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>maantieteelliset EUREF-FIN-koord.</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas (GRS80)	= 6 378 137 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde (GRS80)	= 1/298.257222101
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla (UTM)	= 0.9996
$\lambda_0$	= projektionkeskimeridiaani (radiaaneina) (TM35)	= 0.471238898038469 (27°)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (UTM)	= 500 000
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)	= 1.102369021930
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)	= 0.372098448769

Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001679220394629
$A_1$	=	6367449.14577105
$e^2$	=	0.006694380022901
$h_1'$	=	0.000837731824734
$h_2'$	=	0.000000760852779
$h_3'$	=	0.000000001197638
$h_4'$	=	0.000000000002443
$Q'$	=	1.432998470937008
$Q''$	=	0.073135700189027
$Q$	=	1.427014567111192
$l$	=	-0.099140449269469
$\beta$	=	1.099660165741117
$\eta'$	=	-0.044956329227440
$\xi'$	=	1.101648172390842
$\xi_1$	=	0.000678407385673
$\xi_2$	=	-0.000000737317773
$\xi_3$	=	0.000000000398417
$\xi_4$	=	0.00000000001495
$\eta_1$	=	0.000044588010879
$\eta_2$	=	0.000000041412552
$\eta_3$	=	-0.000000000309685

$$\eta_4 = 0.000000000000735$$

$$\xi = 1.102325842858653$$

$$\eta = -0.044911700112959$$

**tulos: ETRS-TM35FIN-koordinaatit**

---

<i>N</i>	=	7016196.1450	=	7016196.145
<i>E</i>	=	214141.4227	=	214141.423

---

## Laskuesimerkki 11. ETRS-TM35FIN-koordinaattien konvertoiminen ETRS-GK27-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B3.

<b>syöte:</b>	<b>ETRS-TM35FIN-koordinaatit</b>
$N$	= 7016196.1450
$E$	= 214141.4227
$N_{ETRS-GK27} = N_{ETRS-TM35FIN} / 0.9996$ $E_{ETRS-GK27} = (E_{ETRS-TM35FIN} - 200) / 0.9996$	
<b>tulos:</b>	<b>ETRS-GK27-koordinaatit</b>
$N$	= 7019003.7465
$E$	= 214027.0335 (= 27214027.0335)



## Laskuesimerkki 12. Affiinen muunnos kolmioittain

Laskentakaavat liitteessä C3.1.

**syöte: ETRS-GK27-koordinaatit**

---

$N$  = 7019003.7465  
 $E$  = 214027.0335

---

Pisteet 254, 429 ja 541 määrittävät kolmion, jonka sisälle piste osuu.  
 Pisteiden ykj- ja ETRS-GK27-koordinaatit ovat:

Piste	$x$ (ykj)	$y$ (ykj)	$N$ (ETRS-GK27)	$E$ (ETRS-GK27)
254	7041300.513	3215140.599	7041166.051	214970.055
429	6994980.153	3235047.964	6994845.826	234877.727
541	7008897.930	3200995.421	7008763.356	200825.067

Lasketaan nyt affiinisen muunnoksen parametrit.  
 Muodostetaan A-matriisi ja y-vektori:

$$A = \begin{bmatrix} 7041166.051 & 214970.055 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7041166.051 & 214970.055 & 1 \\ 6994845.826 & 234877.727 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6994845.826 & 234877.727 & 1 \\ 7008763.356 & 200825.067 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7008763.356 & 200825.067 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 7041300.513 \\ 3215140.599 \\ 6994980.153 \\ 3235047.964 \\ 7008897.930 \\ 3200995.421 \end{bmatrix}$$

Nyt voidaan laskea muunnosparametrit:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \Delta x \\ b_1 \\ b_2 \\ \Delta y \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y = \begin{bmatrix} 0.999999753818884 \\ -0.000007354080793 \\ 137.7761 \\ 0.000006248722485 \\ 0.999999118040421 \\ 3000126.7352 \end{bmatrix}$$

Koska pisteitä on vain kolme, painoyksikön keskivirhettä tai residuaaleja ei voida laskea. Muunnoksessa käytettävillä pisteillä ei siis ole minkäänlaista kontrollia ja suuretkin karkeat virheet jäävät löytymättä. Lasketaan pisteen koordinaatit parametreilla (kaava 5.7):

<b>tulos:</b>	<b>ykj-tasokoordinaatit</b> <sup>*)</sup>
$x$	= 7019138.2207
$y$	= 3214197.4398

<sup>\*)</sup> jos olisi käytetty parametreissa  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  ja  $b_2$  12 desimaalin tarkkuutta olisi koordinaateiksi saatu  $x=7019138.2207$  ja  $y=3214197.4397$

## Laskuesimerkki 13. ykj-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi kkj-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>ykj-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas ( <i>Hayford</i> )	= 6378388 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde ( <i>Hayford</i> )	= 1/297
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 1
$\lambda_0$	= projektion keskimeridiaani (radiaaneina) ( <i>1. kaista</i> )	= 0.471238898038469 (27°)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla ( <i>1. kaista</i> )	= 3 500 000
$y$	= itäkoordinaatti ( <i>ykj-koordinaatti</i> )	= 3214197.4398
$x$	= pohjoiskoordinaatti ( <i>ykj-koordinaatti</i> )	= 7019138.2207

Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001686340640809
$A_1$	=	6367654.50005758
$e^2$	=	0.006722670022333
$h_1$	=	0.000841276338819
$h_2$	=	0.000000059561930
$h_3$	=	0.000000000169485
$h_4$	=	0.000000000000220
$\xi$	=	1.102311411625195
$\eta$	=	-0.044883490490481
$\xi_1'$	=	0.000680605933886
$\xi_2'$	=	-0.000000057764683
$\xi_3'$	=	0.000000000057038
$\xi_4'$	=	0.000000000000134
$\eta_1'$	=	0.000044784788795
$\eta_2'$	=	0.000000003209385
$\eta_3'$	=	-0.000000000043693
$\eta_4'$	=	0.000000000000066
$\xi'$	=	1.101630863398821
$\eta'$	=	-0.044928278445034

$$\beta = 1.099645414803882$$

$$l = -0.099075591740036$$

$$Q = 1.426982069297743$$

$$Q' = 1.432982972620163$$

$$Q' = 1.432991284671913$$

$$Q' = 1.432991296123705$$

$$Q' = 1.432991296139482$$

$$Q' = 1.432991296139504$$

iterointia

<b>tulos:</b>	<b>maantieteelliset kkj-koordinaatit</b>	<b>asteina</b>
$\varphi$	= 1.102365782617 (rad)	= 63° 9'39.26457''
$\lambda$	= 0.372163306298 (rad)	= 21°19'24.19227''

## Laskuesimerkki 14. Maantieteellisten kkj-koordinaattien konvertoiminen kkj-tasokoordinaateiksi kaistaan 1

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>maantieteelliset kkj-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas ( <i>Hayford</i> )	= 6378388 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde ( <i>Hayford</i> )	= 1/297
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 1
$\lambda_0$	= projektionkeskimeridiaani (radiaaneina) ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 0.366519142918809 (21°)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (1. kaista)	= 1 500 000 m
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)	= 1.102365782617
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)	= 0.372163306298

### Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001686340640809
$A_1$	=	6367654.50005758
$e^2$	=	0.006722670022333
$h_1'$	=	0.000841275991010
$h_2'$	=	0.000000767306686
$h_3'$	=	0.000000001212912
$h_4'$	=	0.000000000002485
$Q'$	=	1.432991296140598
$Q''$	=	0.073290502796057
$Q$	=	1.426982069298836
$l$	=	0.005644163379191
$\beta$	=	1.099645414804378
$\eta'$	=	0.002561946065234
$\xi'$	=	1.099651857113258
$\xi_1$	=	0.000680522107073
$\xi_2$	=	-0.000000729879855
$\xi_3$	=	0.000000000375508
$\xi_4$	=	0.000000000001459
$\eta_1$	=	-0.000002534381131
$\eta_2$	=	-0.000000002427078
$\eta_3$	=	0.000000000017729

$$\eta_4 = -0.0000000000000041$$

$$\xi = 1.100331649717444$$

$$\eta = 0.002559409274714$$

**tulos:      kkj-koordinaatit (Kaista 1)**

---

$x$	=	7006531.7809	=	7006531.781
-----	---	--------------	---	-------------

$y$	=	1516297.4340	=	1516297.434
-----	---	--------------	---	-------------

---

Eli lopputuloksena saatiin samat koordinaatit kuin alussa esimerkissä 1 oli (kolmen desimaalin tarkkuudella).

## Laskuesimerkki 15. Kolmiulotteisten EUREF-FIN-koordinaattien muuntaminen ”3D-kkj”-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä C1.1.

<b>syöte:</b>		<b>Kolmiulotteiset EUREF-FIN-koordinaatit (parametrit: JHS153)</b>			
		<b>kierrot radiaaneina</b>			
$\Delta X$	=	96.0610	m	=	96.0610 m
$\Delta Y$	=	82.4298	m	=	82.4298 m
$\Delta Z$	=	121.7485	m	=	121.7485 m
$\varepsilon_x$	=	0.000023276341	rad	=	4.80109 kaarisek.
$\varepsilon_y$	=	0.000001674837	rad	=	0.34546 kaarisek.
$\varepsilon_z$	=	-0.000006673218	rad	=	-1.37645 kaarisek.
$m$	=	-0.00000149651		=	-1.49651 ppm
		<b>EUREF-FIN-koordinaatit (samat kuin esim. 7)</b>			
$X$	=	2689749.049			
$Y$	=	1049753.286			
$Z$	=	5668129.513			

Sijoitetaan arvot kaavaan (kierrot radiaaneina):

$$\begin{bmatrix} X_{KKJ} \\ Y_{KKJ} \\ Z_{KKJ} \end{bmatrix} = (1 + m) \cdot \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{EUREF-FIN} \\ Y_{EUREF-FIN} \\ Z_{EUREF-FIN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

<b>tulos:</b>		<b>”3D-kkj”</b>
$X$	=	2689824.5864
$Y$	=	1049984.0272
$Z$	=	5668222.8496

## Laskuesimerkki 16. ”3D-kkj”-koordinaattien konvertoiminen maantieteellisiksi kkj-koordinaateiksi

Laskentakaavat liitteessä B2.

<b>syöte:</b>	<b>”3D-kkj”-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas (Hayford)	= 6378388 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde (Hayford)	= 1/297
$X$	= 2689824.5864	
$Y$	= 1049984.0272	
$Z$	= 5668222.8496	
Apusuureet ja laskennan eteneminen		
$e^2$	= 0.006722670022333	
$\varphi_0$	= 1.102365616764078	
$N_1$	= 6395526.41518825	iterointia *)
$h_1$	= -0.5928	
$\varphi_1$	= 1.102365617016796	
$N_2$	= 6395526.41519265	
$h_2$	= -0.5936	
$\varphi_2$	= 1.102365617017144	
$N_3$	= 6395526.41519266	
$h_3$	= -0.5936	
$\varphi_3$	= 1.102365617017144	
<b>tulos:</b>	<b>maantieteelliset kkj-koordinaatit ja korkeus Hayfordin ellipsoidilta</b>	<b>asteina</b>
$\varphi$	= 1.102365617017	= 63° 9'39.23041''
$\lambda$	= 0.372163379638	= 21°19'24.20739''
$h$	= -0.5936	= -0.594 m

\*) kolme kierrosta iterointia antaa tuloksen riittävällä tarkkuudella, muutos edelliseen kierrokseen:  $dh_i < 10^{-4}$  ja  $d\varphi_i < 10^{-15}$



## Laskuesimerkki 17. Maantieteellisten kkj-koordinaattien konvertoiminen kkj-tasokoordinaateiksi 1. kaistaan

Laskentakaavat liitteessä B1.

<b>syöte:</b>	<b>maantieteelliset kkj-koordinaatit</b>	
$a$	= ellipsoidin isoakselin puolikas ( <i>Hayford</i> )	= 6378388 m
$f$	= ellipsoidin litistysuhde ( <i>Hayford</i> )	= 1/297
$k_0$	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 1
$\lambda_0$	= projektionkeskimeridiaani (radiaaneina) ( <i>Gauss-Krüger</i> )	= 0.366519142918809 (21°)
$E_0$	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (1. kaista)	= 1 500 000 m
$\varphi$	= maantieteellinen leveys (radiaaneina)	= 1.102365612973
$\lambda$	= maantieteellinen pituus (radiaaneina)	= 0.372163379621

### Apusuureet ja laskennan eteneminen

$n$	=	0.001686340640809
$A_1$	=	6367654.50005758
$e^2$	=	0.006722670022333
$h_1'$	=	0.000841275991010
$h_2'$	=	0.000000767306686
$h_3'$	=	0.000000001212912
$h_4'$	=	0.000000000002485
$Q'$	=	1.432990929352243
$Q''$	=	0.073290496632850
$Q$	=	1.426981703015813
$l$	=	0.005644236719191
$\beta$	=	1.099645248544055
$\eta'$	=	0.002561980191006
$\xi'$	=	1.099651691021915
$\xi_1$	=	0.000680522271616
$\xi_2$	=	-0.000000729879699
$\xi_3$	=	0.000000000375507
$\xi_4$	=	0.000000000001459
$\eta_1$	=	-0.000002534413731
$\eta_2$	=	-0.000000002427115
$\eta_3$	=	0.000000000017730

$$\eta_4 = -0.0000000000000041$$

$$\xi = 1.100331483790799$$

$$\eta = 0.002559443367848$$

**tulos:**      **kkj-koordinaatit (kaista 1) <sup>\*)</sup>**

---


$$x = 7006530.7243$$

$$\approx 7006530.7$$

$$y = 1516297.6511$$

$$\approx 1516297.7$$


---

<sup>\*)</sup> **HUOM!** Koordinaattien tarkkuus 7-parametrisellä muunnoksella noin 1 metri verrattuna esi-  
merkin 14 tulokseen!

## Laskuesimerkki 18. Neliparametrinen Helmert-muunnosparametrien laskenta

Laskentakaavat liitteessä C2.

Lasketaan muunnosparametrit 5 pisteen avulla, joiden koordinaatit ovat

pno	$x$ (ykj)	$y$ (ykj)	$N$ (ETRS-TM35FIN)	$E$ (ETRS-TM35FIN)
G36	6687618.911	3442590.903	6684812.357	442444.920
G37	6733086.631	3445762.926	6730261.658	445615.229
G42	6712263.904	3495070.508	6709447.856	494903.060
G46	6739155.932	3549007.545	6736329.521	548818.200
G208	6775123.571	3494444.608	6772282.175	494277.011

Lasketaan muunnos ykj-koordinaatistosta ETRS-TM35FIN-tasokoordinaatistoon

Muunnoksen yleinen muoto:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Funktionaalinen malli:

$$f_{i1} : ax_{1,i} - by_{1,i} + c - x_{2,i} = 0$$

$$f_{i2} : ay_{1,i} + bx_{1,i} + d - y_{2,i} = 0$$

Kirjoitetaan yhtälö nyt virheyhtälötasonmuotoon:

$$A\hat{x} - v = y$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & -y_{1,1} & 1 & 0 \\ y_{1,1} & x_{1,1} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,m} & -y_{1,m} & 1 & 0 \\ y_{1,m} & x_{1,m} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{x1,1} \\ v_{y1,1} \\ \vdots \\ v_{x1,m} \\ v_{y1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ y_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,m} \\ y_{2,m} \end{bmatrix}$$

Muodostetaan A ja y:

$$A = \begin{bmatrix} 6687618.911 & -3442590.903 & 1 & 0 \\ 3442590.903 & 6687618.911 & 0 & 1 \\ 6733086.631 & -3445762.926 & 1 & 0 \\ 3445762.926 & 6733086.631 & 0 & 1 \\ 6712263.904 & -3495070.508 & 1 & 0 \\ 3495070.508 & 6712263.904 & 0 & 1 \\ 6739155.932 & -3549007.545 & 1 & 0 \\ 3549007.545 & 6739155.932 & 0 & 1 \\ 6775123.571 & -3494444.608 & 1 & 0 \\ 3494444.608 & 6775123.571 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 6684812.357 \\ 442444.920 \\ 6730261.658 \\ 445615.229 \\ 6709447.856 \\ 494903.060 \\ 6736329.521 \\ 548818.200 \\ 6772282.175 \\ 494277.011 \end{bmatrix}$$

normaaliyhtälöt:

$$(A^T A)\hat{x} = A^T y$$

josta voidaan nyt ratkaista muunnosparametrit

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.999596803938357 \\ -0.000008719474044 \\ -140.1794 \\ -2998699.6471 \end{bmatrix}$$

residuaalit:

$$v = A\hat{x} - y = \begin{bmatrix} -0.0294 \\ -0.0158 \\ 0.0848 \\ 0.0228 \\ -0.0146 \\ 0.0748 \\ -0.0240 \\ -0.0099 \\ -0.0168 \\ -0.0720 \end{bmatrix}$$

painoyksikön keskivirhe:

$$\hat{m}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{2m-4}}$$

$$\hat{m}_0 = 0.059 \text{ m}$$

## SUOMEN GEODEETTISEN LAITOKSEN TIEDOTTEITA

1. MIKKO LINDHOLM & TAPANI SARJAKOSKI: Tietokone karttaopetuksessa. 1989. 33 s.
2. HANNA KEMPPAINEN: Oliot paikkatiedossa. 1991. 26 s.
3. OLLI JAAKKOLA & TAPANI SARJAKOSKI: Satelliittikuvatulkinnan epävarmuuden visualisointi. 1991. 31 s. \*
4. MIKKO LINDHOLM: Tietokonekartasto hypermediaa soveltaen. 1991. 86 s. \*
5. PANU SOTKAS, JUHANI LAAKSONEN & RISTO KUITTINEN: Satelliittikuvan tulkintatarkkuuden määrittäminen. 1992. 46 s.
6. PEKKA LEHMUSKOSKI & MIKKO TAKALO: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 1990-1991. 1992. 23 s.
7. PIRKKO LAURILA: Luonnonilmiöiden kolmiulotteisten mallien visualisointi tietokoneella. 1993. 84 s.
8. MATTI OLLIKAINEN: GPS-koordinaattien muuntaminen kartastokoordinaateiksi. 1993. 31 s.
9. JUHA JAAKKOLA & EIJA ORAVA: Pikselin suuruuden, sävyjen määrän ja tiivistämisen vaikutuksesta digitaalisen ilmakuvan geometriaan. 1993. 49 s.
10. RISTO KUITTINEN & EERO AHOKAS: Maaston radianssien määrittäminen satelliittikuvilta. 1994. 59 s.
11. PEKKA LEHMUSKOSKI & PAAVO ROUHIAINEN: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 1992-1993. 1994. 27 s.
12. RISTO KUITTINEN & JUHANI LAAKSONEN: Kontrastin vaimeneminen satelliitista tehtävissä kuvauksissa. 1994. 23 s.
13. PASI MYLLYNIEMI & TAPANI SARJAKOSKI: Itseorganisoituvat kartat alueellisessa analyysissä - Itämeren lohikannan seuranta. 1996. 52 s.
14. PEKKA LEHMUSKOSKI & PAAVO ROUHIAINEN: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 1994-1995. 1996. 35 s.
15. HANNA KEMPPAINEN: Yhteenveto paikkatietojen laadun ja epävarmuuden mallintamisesta. 1997. 53 s.
16. MATTI OLLIKAINEN, HANNU KOIVULA, MARKKU POUTANEN & RUIZHI CHEN: Suomen kiinteiden GPS-asemien verkko. 1997. 34 s.
17. PAAVO ROUHIAINEN: Geodeettisen laitoksen suorittamat Suomen mareografien korkeudenmäärytykset. 1997. 17 s.
18. HANNA KEMPPAINEN: Rakennustietojen integrointi ja laatu. 1998. 63 s.
19. PEKKA LEHMUSKOSKI & PAAVO ROUHIAINEN: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 1996-1997. 1998. 37 s.
20. HANNU RUOTSALAINEN, JAAKKO MÄKINEN & JUSSI KÄÄRIÄINEN: Gravimetrien kalibrointilinja Masala-Vihti. 1998. 8 s. + 6 liites.
21. MIKA KARJALAINEN & RISTO KUITTINEN: Ortokuvien tuottaminen peltolohkotietokannan ajantasaistukseen ja viljakasvien tulkintaan. 1999. 39 s.
22. PEKKA LEHMUSKOSKI & PAAVO ROUHIAINEN: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 1998-1999. 2000. 31 s.
23. VILLE HELMINEN, OLLI JAAKKOLA & TAPANI SARJAKOSKI: Slices-maankäyttöluokituksen laadun tarkastus. 2001. 57 s.
24. MATTI OLLIKAINEN, HANNU KOIVULA & MARKKU POUTANEN: EUREF-FIN-koordinaatisto ja EUREF-pistetihennykset Suomessa. 2001. 32 s.
25. PEKKA LEHMUSKOSKI & PAAVO ROUHIAINEN: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 2000-2001. 2002. 26 s.
26. PEKKA LEHMUSKOSKI & PAAVO ROUHIAINEN: Lisäyksiä ja korjauksia Suomen tarkkavaaitusten linjastoon 2002-2003. 2004. 30 s.
27. PASI HÄKLI & HANNU KOIVULA: Virtuaali-RTK (VRS™) tutkimus. 2004. 60 s.
28. ANTTI JACOBSSON & HARRI HUTTUNEN: Kuntien ja Maanmittauslaitoksen tuottamien maastotietojen tietomallien harmonisointitarpeesta ja tietojen yhteiskäytön toteuttamisesta. 2005. 182 s. + 102 liites.
29. MIRJAM BILKER-KOIVULA & MATTI OLLIKAINEN: Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. 2009. 48 s.
30. PASI HÄKLI, JYRKI PUUPPONEN, HANNU KOIVULA & MARKKU POUTANEN: Suomen geodeettiset koordinaatistot ja niiden väliset muunnokset. 2009. 121 s.